МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

ВИЩА МАТЕМАТИКА

Функціональні ряди
Елементи теорії ймовірностей

ЗБІРНИК ІНДИВІДУАЛЬНИХ ЗАВДАНЬ

Рекомендовано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського
як навчальний посібник для студентів,
які навчаються за спеціальністю 186 «Видавництво та поліграфія»

Київ
КПІ ім. Ігоря Сікорського
2019

Вища математика. Функціональні ряди. Елементи теорії ймовірностей. Збірник індивідуальних завдань [Електронний ресурс] : навч. посіб. для студ. спеціальності 186 «Видавництво та поліграфія» / КПІ ім. Ігоря Сікорського ; уклад.: О. І. Кушлик-Дивульська, Н. В. Поліщук, Б. Р. Кушлик. – Електронні текстові дані (1 файл: 2,5 Мбайт). – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2019. – 113 с.

Гриф надано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського (протокол № 7 від 01.04.2019 р.)
за поданням Вченої ради ФМФ (протокол № 2 від 27.02.2019 р.)

Електронне мережне навчальне видання

ВИЩА МАТЕМАТИКА

ФУНКЦІОНАЛЬНІ РЯДИ

ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ

ЗБІРНИК ІНДИВІДУАЛЬНИХ ЗАВДАНЬ

Укладачі: *Кушлик-Дивульська Ольга Іванівна*, канд. фіз.-мат. наук, доц.
Поліщук Наталія Володимирівна, канд. фіз.-мат. наук, доц.
Кушлик Богдан Ростиславович, канд. техн. наук, доц.

Відповідальний редактор *Горбачук В. М.,* д-р фіз.-мат. наук, доц.
Рецензенти: *Станжицький О. М.*, д-р фіз.-мат. наук, проф.
Величко О. М., д-р техн. наук, проф.

Навчальний посібник відповідає навчальній програмі дисципліни «Вища математика» спеціальності 186 «Видавництво та поліграфія» освітньої програми «Видавництво та поліграфія» підготовки студентів Видавничо-поліграфічного інституту. Наведено 10 варіантів індивідуальних завдань за темами «Функціональні ряди» та «Елементи теорії ймовірностей». Показано застосування теоретичного матеріалу до розв'язування типових практичних задач у відповідності до варіанту. Додатки містять необхідний довідковий матеріал деяких тем курсу вищої математики.

Для студентів ВПІ КПІ ім. Ігоря Сікорського та інших факультетів, інститутів, які вивчають вищу математику та зацікавлених осіб.

Передмова

За робочими навчальними програмами наявна велика кількість годин для самостійного опрацювання теоретичного матеріалу та його практичного застосування. Для студентів заочної форми навчання передбачається також виконання домашньої контрольної роботи. Ґрунтовне вивчення кредитного модуля «Функціональні ряди. Елемент теорії ймовірностей» навчальної дисципліни «Вища математика» передбачає забезпечення студентів необхідною начально-методичною літературою. Для кредитних модулів «Вища математика-1», «Вища математика-2» та «Вища математика-3» наявні як методичні вказівки, так і навчальні посібники, збірники задач [1], [2], [3], [4], [5], [6], зокрема, також і електронні ресурси [7] - [15].

Посібник має за мету допомогти студенту самостійно оволодіти розв'язуванням задач та прикладів кредитного модуля. Запропонована структура у поданні двох основних розділів та третього додаткового розділу. У збірник індивідуальних завдань включено матеріал за темами «Функціональні ряди» [14], [15], «Елементи теорії ймовірностей» [12], [13], які відповідають робочій навчальній програмі відповідного кредитного модуля. В кожному розділі наведено 10 різних варіантів завдань для індивідуальної роботи, як обов'язкового, так і додаткового змісту. Подано короткі теоретичні відомості та формули, наведена значна кількість розв'язаних задач з відповідними методиками їх розв'язку. Більшість прикладів та задач є типовими, що дозволяє студентові при мінімальній допомозі зі сторони викладача оволодіти основними методами, що є важливо для студентів заочної форми навчання.

Третій додатковий розділ «Елементи математичної статистики» [12], [16] має за мету показати деякі практичні застосування обробки експериментальних даних із застосуванням табличного процесора Microsoft Excel. Його опрацювання може допомогти в написанні бакалаврської роботи, особливо тим студентам, які навчаються за прискореною формою. Навчальне видання також сприятиме більш повному опануванню теоретичної частини матеріалу навчального посібника «Теорія ймовірності та математична статистика» [7], рекомендованого Міністерством освіти і науки як навчальний посібник для студентів технічних та економічних спеціальностей вищих навчальних закладів.

Навчальне видання містить також додатки основних формул за відповідними темами, таблиці значень основних функцій та розподілів з теорії ймовірностей.

Збірник завдань призначено для студентів денної та заочної форми навчання технічних та економічних спеціальностей. Його можна використати також для підготовки до занять, заліків, екзаменів студентам всіх форм навчання, які вивчають подібний матеріал.

Автори вдячні співробітникам кафедри математичної фізики ФМФ, кафедри репрографії ВПІ КПІ імені Ігоря Сікорського та всім читачам, що висловили свої побажання та зауваження. Також укладачі вдячні студентам груп технічних та економічної спеціальності Видавничо-поліграфічного інституту за співпрацю в підготовці та розв’язуванні типових задач, складанні та вирішенні задач прикладного характеру.

Розділ I

Функціональні ряди

1.1. Індивідуальні завдання

Варіант 1

1. Дослідити на збіжність числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n(n+1)}{3^n}$; у випадку збіжності дослідити його на абсолютну та умовну збіжність.

2. Знайти область збіжності степеневого ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n\cdot 2^{n-1}}$.

3. Обчислити вказану величину наближено з точністю до α, використовуючи відповідним чином підібрані функції.

а) $\sqrt[3]{e}, \quad \alpha = 0{,}00001;$ б) $\operatorname{arctg}\frac{1}{3}, \quad \alpha = 0{,}001.$

4. За допомогою розкладу підінтегральної функції в ряд за степенями x обчислити визначений інтеграл $\int_0^1 \sqrt[3]{x^2}\cos x dx$ з точністю до $0{,}001$.

Додаткові завдання

1. Знайти k членів розкладу в степеневий ряд розв'язку диференціального рівняння $y'' = yy' - x^2; \quad y(0) = y'(0) = 1, \quad k = 3.$

2. Розкласти в ряд Фур'є періодичну (з періодом $\omega = 2\pi$) функцію $f(x)$, задану на відрізку $[-\pi, \pi]$, якщо $f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \le x < 0, \\ x-1, & 0 \le x \le \pi. \end{cases}$

3. Розкласти в тригонометричний ряд Фур'є функцію $f(x) = x + 3$, задану на інтервалі $(0, \pi)$, продовживши її парним або непарним способом.

Варіант 2

1. Дослідити на збіжність числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n(n+1)}}$; у випадку збіжності дослідити його на абсолютну та умовну збіжність.

2. Знайти область збіжності степеневого ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n-3)\cdot(2n-2)}$.

3. Обчислити вказану величину наближено з точністю до α, використовуючи відповідним чином підібрані функції.

а) $\operatorname{arctg} 1/2, \quad \alpha = 0{,}001;$ б) $\sqrt[6]{738}, \quad \alpha = 0{,}001.$

4. За допомогою розкладу підінтегральної функції в ряд за степенями x обчислити визначений інтеграл $\int_0^{0.1} e^{-6x^2}dx$ з точністю до 0,001.

Додаткові завдання

1. Знайти k членів розкладу в степеневий ряд розв'язку диференціального рівняння $y' = x^2 + y^3; \quad y(1) = 1, \quad k = 4.$

2. Розкласти в ряд Фур'є періодичну (з періодом $\omega = 2\pi$) функцію $f(x)$, задану на відрізку $[-\pi, \pi]$, якщо $f(x) = \begin{cases} 2x-1, & -\pi \le x < 0, \\ 0, & 0 \le x \le \pi. \end{cases}$

3. Розкласти в тригонометричний ряд Фур'є функцію $f(x) = x^2$, задану на інтервалі $(0, \pi)$, продовживши її парним або непарним способом.

Варіант 3

1. Дослідити на збіжність числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n(n^2+1)}$; у випадку збіжності дослідити його на абсолютну та умовну збіжність.

2. Знайти область збіжності степеневого ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{(n+3)\cdot 3^{n-1}}$.

3. Обчислити вказану величину наближено з точністю до α, використовуючи відповідним чином підібрані функції.

а) $e^2, \quad \alpha = 0{,}001;$ б) $\cos 2°, \quad \alpha = 0{,}001.$

4. За допомогою розкладу підінтегральної функції в ряд за степенями x обчислити визначений інтеграл $\int_0^1 \sin x^2 dx$ з точністю до 0,001.

Додаткові завдання

1. Знайти k членів розкладу в степеневий ряд розв’язку диференціального рівняння $y'' = xy^2 - y'; \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 1, \quad k = 4.$

2. Розкласти в ряд Фур’є періодичну (з періодом $\omega = 2\pi$) функцію $f(x)$, задану на відрізку $[-\pi, \pi]$, якщо $f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \le x < 0, \\ x + 2, & 0 \le x \le \pi. \end{cases}$

3. Розкласти в тригонометричний ряд Фур’є функцію $f(x) = e^{-x}$, задану на інтервалі $(0, \pi)$, продовживши її парним або непарним способом.

Варіант 4

1. Дослідити на збіжність числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(2n+1)}{n(n+1)}$; у випадку збіжності дослідити його на абсолютну та умовну збіжність.

2. Знайти область збіжності степеневого ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1)\cdot 5^{n-1}}$.

3. Обчислити вказану величину наближено з точністю до α, використовуючи відповідним чином підібрані функції.

а) $\sin 1, \quad \alpha = 0{,}00001;$ б) $\sqrt{1{,}3}, \quad \alpha = 0{,}001.$

4. За допомогою розкладу підінтегральної функції в ряд за степенями x обчислити визначений інтеграл $\int_0^1 \cos x^2 dx$ з точністю до 0,001.

Додаткові завдання

1. Знайти k членів розкладу в степеневий ряд розв'язку диференціального рівняння $y' = xy + e^{y}; \quad y(0) = 0, \quad k = 4.$

2. Розкласти в ряд Фур'є періодичну (з періодом $\omega = 2\pi$) функцію $f(x)$, задану на відрізку $[-\pi, \pi]$, якщо $f(x) = \begin{cases} -x + 1/2, & -\pi \le x < 0, \\ 0, \ 0 \le x \le \pi. \end{cases}$

3. Розкласти в тригонометричний ряд Фур'є функцію $f(x) = 3x - 2,$ задану на інтервалі $(0, \pi)$, продовживши її парним або непарним способом.

Варіант 5

1. Дослідити на збіжність числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(\frac{n}{2n+1} \right)^{n}$; у випадку збіжності дослідити його на абсолютну та умовну збіжність.

2. Знайти область збіжності степеневого ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n}}{2n+1}$.

3. Обчислити вказану величину наближено з точністю до α, використовуючи відповідним чином підібрані функції.

а) $\sqrt[10]{1027}, \quad \alpha = 0{,}001$;   б) $\ln 3/2, \quad \alpha = 0{,}001.$

4. За допомогою розкладу підінтегральної функції в ряд за степенями x обчислити визначений інтеграл $\int_{0}^{1} \frac{\ln\left(1 + x/5\right)}{x} dx$ з точністю до 0,001.

Додаткові завдання

1. Знайти k членів розкладу в степеневий ряд розв'язку диференціального рівняння $y' = x + x^{2} + y^{2}; \quad y(0) = 1, \quad k = 3.$

2. Розкласти в ряд Фур’є періодичну (з періодом $\omega = 2\pi$) функцію $f(x)$, задану на відрізку $[-\pi, \pi]$, якщо $f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \le x < 0, \\ x/2 + 1, & 0 \le x \le \pi. \end{cases}$

3. Розкласти в тригонометричний ряд Фур’є функцію $f(x) = e^{3x}$, задану на інтервалі $(0, \pi)$, продовживши її парним або непарним способом.

Варіант 6

1. Дослідити на збіжність числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n-1)\cdot 3^n}$; у випадку збіжності дослідити його на абсолютну та умовну збіжність.

2. Знайти область збіжності степеневого ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}}$.

3. Обчислити вказану величину наближено з точністю до α, використовуючи відповідним чином підібрані функції.

а) $e^{1/6}$, $\alpha = 0,001$; б) $\sqrt[3]{127}$, $\alpha = 0,001$.

4. Обчислити інтеграл $\int_0^{0,2} \sqrt{x} \cos x dx$ з точністю до $\alpha = 0,001$.

Додаткові завдання

1. Знайти k членів розкладу в степеневий ряд розв’язку диференціального рівняння $y'' = y \cos y' + x$; $y(0) = 1$, $y'(0) = \frac{\pi}{3}$, $k = 3$.

2. Розкласти в ряд Фур’є періодичну (з періодом $\omega = 2\pi$) функцію $f(x) = \begin{cases} 5x + 1, & -\pi \le x < 0, \\ 0, & 0 \le x \le \pi, \end{cases}$ задану на відрізку $[-\pi, \pi]$.

3. Розкласти в тригонометричний ряд Фур’є функцію $f(x) = x + 1$, задану на інтервалі $(0, \pi)$, продовживши її парним або непарним способом.

Варіант 7

1. Дослідити на збіжність числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\cdot 2^n}{n^2}$; у випадку збіжності дослідити його на абсолютну та умовну збіжність.

2. Знайти область збіжності степеневого ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2}$.

3. Обчислити вказану величину наближено з точністю до α, використовуючи відповідним чином підібрані функції.

а) $e^{-1/5}$, $\alpha = 0,0001$; б) $\sqrt[3]{500}$, $\alpha = 0,001$.

4. Обчислити інтеграл $\int_0^{0,2}\sqrt{x}e^{-x}dx$ з точністю до $\alpha = 0,001$.

Додаткові завдання

1. Знайти k членів розкладу в степеневий ряд розв'язку диференціального рівняння $y' = \frac{1-x^2}{y}+1$; $y(0)=1$, $k=5$.

2. Розкласти в ряд Фур'є періодичну (з періодом $\omega = 2\pi$) функцію $f(x)=\begin{cases}0, & -\pi \le x < 0,\\ (\pi - x)/2, & 0 \le x \le \pi,\end{cases}$ задану на відрізку $[-\pi, \pi]$.

3. Розкласти в тригонометричний ряд Фур'є функцію $f(x) = 3x-1$, задану на інтервалі $(0, \pi)$, продовживши її парним або непарним способом.

Варіант 8

1. Дослідити на збіжність числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n+5}{3^n}$; у випадку збіжності дослідити його на абсолютну та умовну збіжність.

2. Знайти область збіжності степеневого ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!x^n}{5^n}$.

3. **О**бчислити вказану величину наближено з точністю до α, використовуючи відповідним чином підібрані функції.

а) $e^{1/2}, \quad \alpha = 0,001;$ б) $\sin 18°, \quad \alpha = 0,001.$

4. Обчислити інтеграл $\int\limits_0^{0,25} \ln(1+\sqrt{x})dx$ з точністю до $\alpha = 0,001.$

Додаткові завдання

1. Знайти k членів розкладу в степеневий ряд розв'язку диференціального рівняння $y'' = e^y \sin y'; \quad y(\pi) = 1, \quad y'(\pi) = \frac{\pi}{2}, \quad k = 3.$

2. Розкласти в ряд Фур'є періодичну (з періодом $\omega = 2\pi$) функцію $f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \le x < 0, \\ 3x-1, & 0 \le x \le \pi, \end{cases}$ задану на відрізку $[-\pi, \pi]$.

3. Розкласти в тригонометричний ряд Фур'є функцію $f(x) = e^{-x/4}$, задану на інтервалі $(0, \pi)$, продовживши її парним або непарним способом.

Варіант 9

1. Дослідити на збіжність числовий ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n\sqrt[3]{n}}$; у випадку збіжності дослідити його на абсолютну та умовну збіжність.

2. Знайти область збіжності степеневого ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{10^n x^n}{\sqrt{n}}$.

3. Обчислити вказану величину наближено з точністю до α, використовуючи відповідним чином підібрані функції.

а) $\operatorname{arctg}\left(\pi/10\right), \quad \alpha = 0,001;$ б) $\sqrt[3]{70}, \quad \alpha = 0,001.$

4. Обчислити інтеграл $\int\limits_0^{0,4} e^{-3x^2/4} dx$ з точністю до $\alpha = 0,001.$

Додаткові завдання

1. Знайти k членів розкладу в степеневий ряд розв'язку диференціального рівняння $y' = xy + y^2; \quad y(0) = 0{,}1, \quad k = 3.$

2. Розкласти в ряд Фур'є періодичну (з періодом $\omega = 2\pi$) функцію $f(x) = \begin{cases} 5 - x, & -\pi \le x < 0, \\ 0, & 0 \le x \le \pi, \end{cases}$ задану на відрізку $[-\pi, \pi]$.

3. Розкласти в тригонометричний ряд Фур'є функцію $f(x) = 5^x$, задану на інтервалі $(0, \pi)$, продовживши її парним або непарним способом.

Варіант 10

1. Дослідити на збіжність числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2n+1}{n^2(n+1)}$; у випадку збіжності дослідити його на абсолютну та умовну збіжність.

2. Знайти область збіжності степеневого ряду $\sum_{n=1}^{\infty} n! \cdot x^n$.

3. Обчислити вказану величину наближено з точністю до α, використовуючи відповідним чином підібрані функції.

а) $\sqrt[3]{e}, \quad \alpha = 0{,}001;$ б) $\cos 10°, \quad \alpha = 0{,}001.$

4. Обчислити інтеграл $\int_0^{0,5} \ln(1 + x^2)dx$ з точністю до $\alpha = 0{,}001$.

Додаткові завдання

1. Знайти k членів розкладу в степеневий ряд розв'язку диференціального рівняння $y' = e^x + y; \quad y(0) = 4, \quad k = 3.$

2. Розкласти в ряд Фур'є періодичну (з періодом $\omega = 2\pi$) функцію $f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \le x < 0, \\ 10x - 3, & 0 \le x \le \pi, \end{cases}$ задану на відрізку $[-\pi, \pi]$.

3. Розкласти в тригонометричний ряд Фур'є функцію $f(x) = (x+1)^2$, задану на інтервалі $(0, \pi)$, продовживши її парним або непарним способом.

1.2. Розв'язування типових прикладів

1.2.1. Збіжність знакопереміжних рядів

Числовий ряд виду

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + ... + (-1)^n u_n + ... = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n,$$

де $u_n > 0 \ (n = 1, 2, 3, \cdots)$, називають ***знакопереміжним*** рядом.

Теорема (ознака Лейбніца). *Знакопереміжний ряд збіжний, якщо абсолютні величини його членів монотонно не зростають, а загальний член прямує до нуля, тобто:*

1) $u_{n+1} \le u_n, \quad n = 1, 2, ...;$

2) $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0.$

Знакопереміжний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n$ збіжний, якщо є збіжним ряд із абсолютних величин

$$|u_1| + |u_2| + |u_3| + ... + |u_n| + ... = \sum_{n=1}^{\infty} |u_n|,$$

при цьому випадку початковий ряд називається ***абсолютно збіжним.*** Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n$ називають ***умовно збіжним***, якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ розбіжний, але виконуються умови ознаки Лейбніца.

Приклад 1. Дослідити збіжність знакопереміжних рядів. У разі збіжності ряду дослідіть його на абсолютну та умовну збіжність.

1) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \operatorname{tg} \frac{2}{\sqrt{n}};$ 2) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left(\frac{3}{8n+7} \right)^n;$

3) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{(2n+1)\cdot 7^n};$ 4) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n}{6n+5}.$

Розв'язування.

1) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \operatorname{tg} \frac{2}{\sqrt{n}}.$

Із вигляду загального члена ряду $u_n = \left(-1\right)^n \operatorname{tg}\frac{2}{\sqrt{n}}$ бачимо, що цей ряд знакопереміжний.

Дослідимо збіжність ряду із абсолютних величин $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg}\frac{2}{\sqrt{n}}$.

Одержаний ряд знакододатний. Застосуємо до нього ознаку порівняння, порівняємо із розбіжним рядом Діріхле $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ (враховуємо еквівалентність $\operatorname{tg}\frac{2}{\sqrt{n}} \sim \frac{2}{\sqrt{n}}, n \to \infty)$.

Обчислюємо границю відношення $\frac{u_n}{v_n}$:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\operatorname{tg}\frac{2}{\sqrt{n}}}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = \lim_{n\to\infty}\frac{2\sqrt{n}}{\sqrt{n}} = 2 = Const.$$

Отже, за ознакою порівняння ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\operatorname{tg}\frac{2}{\sqrt{n}}$ — розбіжний, а отже, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(-1\right)^n\operatorname{tg}\frac{2}{\sqrt{n}}$ не є абсолютно збіжним.

Оскільки досліджуваний ряд є знакопереміжним, то перевіримо для нього виконання умов ознаки Лейбніца:

1) $u_n > u_{n+1} \Leftrightarrow \operatorname{tg}\frac{1}{\sqrt{n}} > \operatorname{tg}\frac{1}{\sqrt{n+1}}$ — виконується;

2) $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty}\operatorname{tg}\frac{1}{\sqrt{n}} = 0$ — виконується.

Отже, за ознакою Лейбніца даний ряд є збіжним, але його збіжність умовна.

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(\dfrac{3}{8n+7}\right)^{n}$.

Дослідимо ряд, що складений із абсолютних величин членів даного ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{8n+7}\right)^{n}.$$

Застосуємо радикальну ознаку Коші:

$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\dfrac{3}{8n+7}\right)^{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3}{8n+7}=0<1$, тобто ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{3}{8n+7}\right)^{n}$ збігається.

Значить, даний знакопереміжний ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(\dfrac{3}{8n+7}\right)^{n}$ збігається абсолютно.

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\dfrac{1}{(2n+1)\cdot 7^{n}}$.

Дослідимо ряд, що складається із абсолютних величин членів даного ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)\cdot 7^{n}}$$

Застосуємо ознаку Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)\cdot 7^{n}}{(2n+3)\cdot 7^{n+1}}=\frac{1}{7}\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{2n+3}=\frac{1}{7}\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{2}{n}}=\frac{1}{7}<1,$$

тобто ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(n+1)\cdot 3^{n}}$ збігається. Значить, даний знакопереміжний ряд збігається абсолютно.

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{n}{6n+5}$.

Ряд із абсолютних величин $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{6n+5}$ розбіжний, оскільки не виконується необхідна умова збіжності

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{6n+5} = \frac{1}{6} \neq 0.$$

За ознакою Лейбніца теж 2-а умова не виконується (вона є такою, як необхідна умова). Отже, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n}{6n+5}$ розбіжний.

1.2.2. Степеневі ряди, їх застосування

Степеневим рядом називається функціональний ряд вигляду

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n, \quad x\in\mathbb{R},$$

де числа $a_0, a_1, ..., a_n, ...$ називають *коефіцієнтами* ряду.

Для дослідження степеневого ряду на збіжність потрібно знайти його інтервал збіжності і з'ясувати збіжність цього ряду на кінцях його інтервалу збіжності. Для знаходження *радіуса збіжності* степеневого ряду (випливає із ознаки Даламбера) використовують формулу

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| \qquad (1.1)$$

У випадку, коли існує $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}$, (випливає із радикальної Коші) застосовують формулу

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}, \qquad (1.2)$$

Інтервал $(x_0 - R, x_0 + R)$ називається *інтервалом збіжності*, а R – *радіусом збіжності* ряду. Якщо $R=0$, то ряд збігається при $x = x_0$; якщо $R=+\infty$, то при всіх $x\in\mathbb{R}$.

Зауваження. Область збіжності часто досліджують за допомогою безпосереднього використання ознак.

Приклад 2. Знайти області збіжності степеневих рядів.

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx^n}{5^n}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n x^n}{n^2+1}$.

Розв'язування.

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx^n}{5^n}$.

Порівнюючи загальний член даного ряду $u_n(x)=\frac{nx^n}{5^n}$ із загальним членом стандартного степеневого ряду $a_n x^n$, встановлюємо, що даний ряд є степеневим із коефіцієнтом $a_n=\frac{n}{5^n}$.

Знаходимо радіус збіжності ряду (формула 1):

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n5^{n+1}}{5^n(n+1)}=5\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=5,$$

$(-5;\ 5)$ — інтервал збіжності ряду.

На кінцях інтервалу збіжності, тобто при $x=\pm5$, маємо розбіжні ряди $\sum_{n=1}^{\infty}n$ та $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n$, для яких, очевидно, не виконується необхідна умова збіжності. Отже, $x\in(-5;\ 5)$ є областю збіжності даного степеневого ряду.

2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n x^n}{n^2+1}$.

Для даного степеневого ряду скористаємося ознакою Даламбера:

$$u_n=\frac{4^n x^n}{n^2+1};\ u_{n+1}=\frac{4^{n+1}x^{n+1}}{(n+1)^2+1}.$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{4^{n+1}x^{n+1}}{(n+1)^2+1}\cdot\frac{n^2+1}{4^n x^n}\right|=|x|\lim_{n\to\infty}4\frac{n^2+1}{(n+1)^2+1}=4|x|.$$

Інтервал збіжності визначається нерівністю $4|x|<1$, звідси $|x|<\frac{1}{4}$; $-\frac{1}{4}<x<\frac{1}{4}$.

Дослідимо граничні точки цього інтервалу.

Для $x=\frac{1}{4}$ одержимо знакододатний числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+1}$. Для дослідження цього ряду на збіжність скористаємося інтегральною ознакою Коші, $f(x)=\frac{1}{x^2+1}$ −визначена, неперервна, монотонно спадна для $x\ge a\ge 1$:

$$\int_{n=1}^{\infty}\frac{dx}{x^2+1}=\lim_{b\to\infty}\int_1^b\frac{dx}{x^2+1}=\lim_{b\to\infty}(\operatorname{arctg}x)\Big|_1^b=\lim_{b\to\infty}(\operatorname{arctg}b-\operatorname{arctg}1)=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}.$$

Інтеграл збігається, значить, збігається і ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+1}$, тому $x=\frac{1}{4}$ належить області збіжності.

Для $x=-\frac{1}{4}$ одержимо знакопереміжний ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+1}$. Для його дослідження записуємо ряд із абсолютних величин $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+1}$, який досліджено для точки $x=\frac{1}{4}$. Отже, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+1}$ є абсолютно збіжним, тому точка $x=-\frac{1}{4}$ теж належить області збіжності.

Таким чином, область збіжності ряду − відрізок $\left[-\frac{1}{4};\frac{1}{4}\right]$.

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{\left(x-2\right)^{n}}$.

Побудуємо ряд із абсолютних величин членів даного ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{\left|x-2\right|^{n}}$.

Цей ряд знакододатний. Отже, можна застосувати до нього ознаку Даламбера (при цьому *x* будемо вважати за деякий параметр):

$$\left|u_n\left(x\right)\right|=\frac{\sqrt{n}}{\left|x-2\right|^{n}};\ \left|u_{n+1}\left(x\right)\right|=\frac{\sqrt{n+1}}{\left|x-2\right|^{n+1}};$$

$$\left|\frac{u_{n+1}\left(x\right)}{u_n\left(x\right)}\right|=\frac{1}{\left|x-2\right|}\sqrt{\frac{n+1}{n}}=\frac{1}{\left|x-2\right|}\sqrt{1+\frac{1}{n}};$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}\left(x\right)}{u_n\left(x\right)}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left|x-2\right|}\sqrt{1+\frac{1}{n}}=\frac{1}{\left|x-2\right|}.$$

За ознакою Даламбера цей ряд буде збіжним, якщо

$$\frac{1}{\left|x-2\right|}<1\Leftrightarrow\left|x-2\right|>1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x-2>1,\\ x-2<-1\end{array}\right.,\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x>3,\\ x<1;\end{array}\right.$$

і розбіжним для

$$\frac{1}{\left|x-2\right|}>1\Leftrightarrow<1\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}x-2<1,\\ x-2>-1;\end{array}\right.\Leftrightarrow 1<x<3.$$

Залишається дослідити ряд на збіжність у точках $x=1$ і $x=3$. Для $x=1$ маємо ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(-1\right)^{n}\sqrt{n}$, а для точки $x=3$ — ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt{n}$. Ці ряди розбіжні, бо, очевидно, що для них не виконується необхідна умова збіжності. Отже, областю збіжності функціонального ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{\left|x-2\right|^{n}}$ буде $x\in\left(-\infty;\ 1\right)\cup\left(3;\ \infty\right)$. У цій області ряд збігається абсолютно.

Застосування степеневих рядів

Застосування до наближених обчислень

В наближених обчисленнях використовують розвинення основних елементарних функцій в ряд Маклорена:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad x \in R; \tag{1}$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad x \in R; \tag{2}$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad x \in R; \tag{3}$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}, \quad -1 < x \le 1; \tag{4}$$

$$\mathrm{arctg}\, x = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)}, \quad -1 \le x \le 1; \tag{5}$$

$$(1+x)^m = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} C_m^n x^n. \tag{6}$$

Розклад (6) має місце в таких випадках: при $m \ge 0$, якщо $x \in [-1; 1]$, при $-1 < m < 0$, якщо $x \in (-1, 1)$ та при $m \le 1$, якщо $x \in (-1, 1)$.

Окремі випадки формули (6):

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n, \quad -1 < x < 1; \tag{7}$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \quad -1 < x < 1. \tag{8}$$

Приклад 3. Скільки членів відповідного ряду Маклорена треба взяти, щоб обчислити $\sqrt[5]{33}$ з точністю до 0,001?

Розв'язування.

Використаємо формулу розвинення біноміальної функції (6) в ряд Маклорена

$$(1+x)^m = 1+\frac{m}{1!}x+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3+\ldots+$$

$$+\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n+\ldots,\quad m\in\mathbb{R}, \tag{1.3}$$

який має місце в зазначених випадках формули (6).

Перетворимо $\sqrt[5]{33}$ так, щоб застосувати формулу (1.3).

$$\sqrt[5]{33}=\sqrt[5]{32+1}=2\sqrt[5]{1+\frac{1}{32}}.$$

Скориставшись рядом, дістанемо такий збіжний знакопереміжний ряд:

$$\sqrt[5]{33}=2\left(1+\frac{1}{32}\right)^{\frac{1}{5}}=2\left(1+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{32}+\frac{1}{2!}\cdot\frac{1}{5}\cdot\left(\frac{1}{5}-1\right)\cdot\left(\frac{1}{32}\right)^2+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{3!}\cdot\frac{1}{5}\cdot\left(\frac{1}{5}-1\right)\cdot\left(\frac{1}{5}-2\right)\cdot\left(\frac{1}{32}\right)^3+\ldots\right).$$

Для такого ряду похибка у разі обчислення його суми за формулою $S=S_n$ не перевищує за абсолютною величиною першого із відкинутих членів. Обчислюємо за абсолютною величиною члени ряду доти, поки не знайдемо такий, що буде менший за 0,001; це і буде перший із відкинутих членів.

$$|u_1|=2;\ |u_2|=\frac{1}{80};\ |u_3|=\frac{4}{5\cdot5\cdot1024}<0{,}001.$$

Отже, для обчислення $\sqrt[5]{33}$ з точністю до 0,001 достатньо залишити два члени ряду. Маємо

$$\sqrt[5]{33}\approx2\left(1+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{32}\right)=2{,}013.$$

Приклад 4. Використовуючи розклад підінтегральної функції в степеневий ряд, обчислити визначений інтеграл з точністю до 0,001.

1) $\int\limits_0^1 \frac{\sin x}{x}dx;$ 2) $\int\limits_0^1 \cos\frac{x^2}{4}dx.$

Розв'язування.

1) Скористаємося формулою (2), за якою

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + ... + (-1)^{n-1}\cdot\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + ... \tag{1.4}$$

Запишемо ряд для підінтегральної функції $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ із використанням формули (1.4):

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} + \frac{x^6}{7!} + ... + (-1)^{n-1}\cdot\frac{x^{2n-2}}{(2n-1)!} + ...$$

Він збігається на всій числовій осі, тому його можна усюди почленно інтегрувати. Значить,

$$\int\limits_0^1 \frac{\sin x}{x}dx = \int\limits_0^1\left(1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} + \frac{x^6}{7!} + ... + (-1)^{n-1}\cdot\frac{x^{2n-2}}{(2n-1)!} + ...\right)dx =$$

$$= \left(x - \frac{x^3}{3\cdot 3!} + \frac{x^5}{5\cdot 5!} - \frac{x^7}{7\cdot 7!} + ...\right)\Big|_0^1 = 1 - \frac{1}{18} + \frac{1}{600} - \frac{1}{35280}... =$$

$$= 1 - 0,0556 + 0,0017 - 0,00003... = 0,946.$$

Так як четвертий член одержаного знакозмінного ряду менше $\alpha = 0,001$, то ми відкинули всі члени ряду, починаючи з четвертого.

Значить, $\int\limits_0^1 \frac{\sin x}{x}dx \approx 0,946.$

2) $\int\limits_0^1 \cos\frac{x^2}{4}dx.$

Скористаємося формулою (3) для функції $y = \cos x$:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - ... + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + ...$$

Запишемо степеневий ряд для підінтегральної функції:

$$\cos\frac{x^2}{4} = 1 - \frac{\left(\frac{x^2}{4}\right)^2}{2!} + \frac{\left(\frac{x^2}{4}\right)^4}{4!} - ... + (-1)^n \frac{\left(\frac{x^2}{4}\right)^{2n}}{(2n)!} + ...$$

Він збігається на всій числовій осі, тому його можна усюди почленно інтегрувати. Значить,

$$\int_0^1 \cos\frac{x^2}{4}dx = \int_0^1 \left(1 - \frac{x^4}{16 \cdot 2!} + \frac{x^8}{256 \cdot 4!} - ...\right)dx = \left(x - \frac{x^5}{5 \cdot 32} + \frac{x^9}{9 \cdot 256 \cdot 24} - ...\right)\Bigg|_0^1 =$$

$$= 1 - \frac{1}{160} + \frac{1}{55296} - ... \approx 0,994.$$

Наближене інтегрування диференціальних рівнянь

Приклад 5. Знайти розклад у степеневий ряд за степенями $(x-1)$ розв'язку диференціального рівняння $y' = 2x + y^3$, $y(1) = 1$ (записати три перших відмінних від нуля члени цього розкладу).

Розв'язування.

Частинний розв'язок $y(x)$ рівняння $y' = f(x, y)$, який задовольняє початкову умову $y(x_0) = y_0$ шукають у вигляді розкладу в ряд

$$y(x) = y(x_0) + \frac{y'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{y''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + ... +$$

$$+ \frac{y^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + ... \qquad (1.5)$$

Точка $x = 1$ не являється особливою для даного рівняння, тому його розв'язок можна шукати у вигляді ряду

$$y(x) = y(1) + \frac{y'(1)}{1!} \cdot (x-1) + \frac{y''(1)}{2!} \cdot (x-2)^2 + \frac{y'''(1)}{3!} \cdot (x-1)^3 + ...$$

Тоді маємо:

$$y'(1)=2+1=3;$$

$$y''=2+3y^2\cdot y';\ y''(1)=2+3\cdot 1^2\cdot 3=2+9=11.$$

Підставивши у формулу, отримуємо

$$y(x)=1+\frac{3}{1}(x-1)+\frac{11}{2}(x-1)^2+\ldots -$$

розклад розв'язку диференціального рівняння.

1.2.3. Ряди Фур'є

Ряд Фур'є періодичної функції $f(x)$ з періодом 2π, заданої на відрізку $[-\pi;\ \pi]$, має вигляд

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos nx+b_n\sin nx\right), \tag{1.6}$$

де

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx,\ a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx,\ b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx. \tag{1.7}$$

Приклад 6. Розвинути в ряд Фур'є функцію $f(x)=\pi+x$, задану на проміжку $(-\pi,\ \pi]$.

Розв'язування.

Знаходимо коефіцієнти ряду Фур'є за формулами (1.7):

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\pi+x)dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\pi\cdot dx+\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x\,dx=\frac{\pi}{\pi}\cdot x\Big|_{-\pi}^{\pi}+0=2\pi,$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\pi+x)\cos nx\,dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\underbrace{\pi\cos nx}_{\text{парна}}dx+\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\underbrace{x\cos nx}_{\text{непарна}}dx=$$

$$=\frac{\pi}{\pi}\cdot 2\int_{0}^{\pi}\cos nx\,dx=\frac{2}{n}\sin nx\Big|_{0}^{\pi}=\frac{2}{\pi}\left(\sin n\pi-\sin 0\right)=0,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\pi + x)\sin nx\,dx = \frac{\pi}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\underset{\text{непарна}}{\pi\sin nx}\,dx + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\underbrace{x\sin nx}_{\text{парна}}\,dx =$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}x\sin nx\,dx = \begin{vmatrix} u = x, & dv = \sin nx\,dx \\ du = dx, & v = -\frac{1}{n}\cos nx \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(-\frac{1}{n}x\cos nx\Big|_0^{\pi} + \frac{1}{n}\int_0^{\pi}\cos nx\,dx\right) = \frac{2}{\pi}\left(-\frac{\pi}{n}\cos n\pi + \frac{1}{n}\cdot 0\cdot\cos 0 + +\frac{1}{n^2}\sin nx\Big|_0^{\pi}\right) =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(-\frac{\pi}{n}\cos n\pi + \frac{1}{n^2}(\sin n\pi - \sin 0)\right) = -\frac{2}{n}\cos n\pi =$$

$$= -\frac{2}{n}\cdot(-1)^n = \frac{2}{n}(-1)^{n+1}.$$

Отже, $a_0 = 2\pi,\ a_n = 0,\ b_n = \frac{2}{n}(-1)^{n+1}.$

Таким чином, за формулою (1.6) ряд Фур’є для заданої функції має вигляд

$$f(x) = \frac{2\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n}(-1)^{n+1}\sin nx = \pi + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx,$$

або

$$f(x) = \pi + 2\left(\sin x - \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x - \ldots\right).$$

Побудуємо графік даної (рис. 1.1) функції $y = \pi + x$.

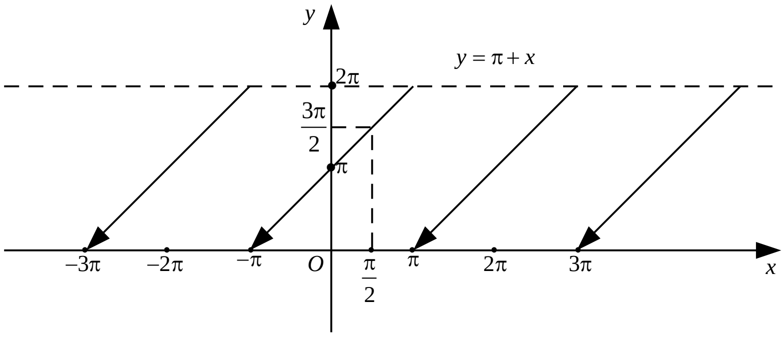


Рис. 1.1. Вигляд функції.

Сума ряду Фур'є (за теоремою Діріхле) в точках неперервності функції дорівнює її значенню. Наприклад, в точці $x_0 = 0$ сума ряду $S\left(x_0\right) = \pi + 0 = \pi$. В точці $x_0 = \dfrac{\pi}{2}$ сума ряду $S\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \pi + \dfrac{\pi}{2} = \dfrac{3\pi}{2}$.

На кінцях інтервалу, наприклад, в точках $x_0 = \pm\pi,$ сума ряду

$$S\left(\pm\pi\right) = \frac{1}{2}\left(\lim_{x\to\pi-0} f\left(x\right) + \lim_{x\to-\pi+0} f\left(x\right)\right) = \frac{1}{2}\left(2\pi + 0\right) = \pi .$$

Приклад 7. Функція $f\left(x\right) = x$ задана на проміжку $\left(0, \pi\right]$. Розвинути її в ряд Фур'є за косинусами.

Розв'язування.

Дану функцію потрібно довизначити на відрізку $\left[-\pi, 0\right]$ так, щоб вона була парною (рис. 1.2). Покладемо $y = -x$ при $x \in \left[-\pi, 0\right]$. Вважаємо функцію періодичною, $T = 2\pi$.

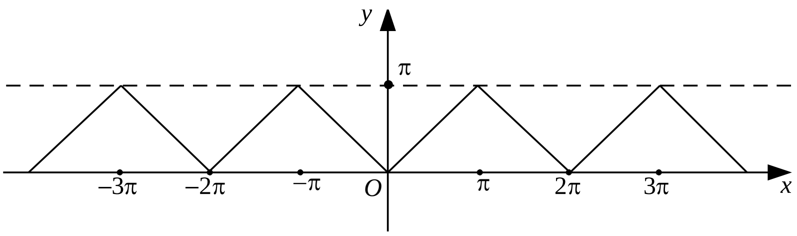


Рис. 1.2. Парне продовження функції.

Функція неперервна на всій осі.

Якщо функція $f(x)$ парна, то в формулах (1.7) коефіцієнти $b_n = 0$ і ряд Фур'є має вигляд $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$ для $x \in [-\pi, \pi]$, де

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)dx, \quad a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\,dx. \qquad (1.8)$$

Коефіцієнти ряду знаходимо за формулами (1.8):

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\,dx = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{x^2}{2}\bigg|_0^{\pi} = \frac{\pi^2}{\pi} = \pi,$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos nx\,dx = \begin{vmatrix} u = x, & dv = \cos nx\,dx \\ du = dx, & v = \frac{1}{n}\sin nx \end{vmatrix} == \frac{2}{\pi}\left(\underbrace{\frac{x}{n}\sin nx\bigg|_0^{\pi}}_{0} - \frac{1}{n}\int_0^{\pi}\sin nx\,dx\right) =$$

$$= \frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{n^2}\cos nx\Big|_0^{\pi} = \frac{2}{\pi n^2}(\cos n\pi - \cos 0) = \frac{2}{\pi n^2}\left((-1)^n - 1\right) = \left[\begin{array}{ll} 0, & n = 2k, \\ \frac{2\cdot(-2)}{\pi(2k-1)^2}, & n = 2k-1. \end{array}\right.$$

Запишемо ряд Фур'є

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - 4\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\pi(2k-1)^2}\cos(2k-1)x$$

або

$$f(x) = \frac{\pi}{2} + \frac{2}{\pi}\left(-\frac{2\cos x}{1} - \frac{2\cos 3x}{9} - \frac{2\cos 5x}{5^2} - \ldots\right).$$

Приклад 8. Розвинути в ряд Фур'є функцію $y = \begin{cases} 1 & \text{при } x \in [0, \pi), \\ -1 & \text{при } x \in [-\pi, 0), \end{cases}$ задану на проміжку $[-\pi, \pi)$.

Розв'язування.

Задана функція є непарною, тому в формулах (1.7) коефіцієнти $a_n = 0$, $a_0 = 0$. Залишаються лише $b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\,dx$ при $x \in [-\pi, \pi]$.

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} 1\cdot \sin nx\, dx = -\frac{2}{n\pi}\cos nx\Big|_0^{\pi} = -\frac{2}{n\pi}\left((-1)^n - 1\right) = \left[\begin{array}{ll} 0, & n = 2k, \\ \dfrac{4}{\pi(2k-1)}, & n = 2k-1. \end{array}\right.$$

Запишемо ряд Фур'є

$$f\left(x\right) = \frac{4}{\pi}\left(\sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \ldots\right) = \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin\left(2k-1\right)x}{2k-1}.$$

Розділ II

Елементи теорії ймовірностей

2.1. Індивідуальні завдання

Варіант 1

1. Підприємство виготовляє 96% стандартних виробів, причому 80% із них вищого сорту. Знайти ймовірність того, що взятий навмання виріб буде стандартним, а не вищого сорту.

2. На склад автомашинами завозиться 30% скляних банок, а решта – залізницею. Ймовірність розбивання скляних банок при транспортуванні на автомашинах дорівнює 0,01, а при транспортуванні залізницею – удвічі менше. Визначити ймовірність того, що узята навмання на складі банка виявиться розбитою.

3. За даним законом розподілу дискретної випадкової величини X

X	-2	-1	0	4	5	7
P	0,12	0,18	0,2	0,3	0,17	0,03

побудувати многокутник розподілу. Знайти $M(X), D(X)$ і $\sigma(X)$.

4. Випадкова величина X задана функцією розподілу ймовірностей $F(x)$:

$$F(x) = \begin{cases} 0, \ x \le 0, \\ \dfrac{x^3}{27}, \ 0 < x \le 3, \\ 1, \ x > 3. \end{cases}$$

Потрібно: а) знайти щільність розподілу ймовірностей $f(x)$;

б) побудувати графіки функцій $F(x)$ і $f(x)$;

в) знайти $M(X)$ і дисперсію випадкової величини X;

г) знайти ймовірність того, що в результаті проведення випробування випадкова величина набуде значення з інтервалу $(\alpha, \beta) = (1, 2)$.

5. Закон розподілу двовимірної дискретної випадкової величини (X, Y) задано відповідною таблицею

X/Y	2	6	10	14
1	0,25	0,25	0	0,05
4	0,2	0,1	0,05	0,1

Потрібно:

1) Знайти числові характеристики складових системи: $M(X), D(X), \sigma(X)$ та $M(Y), D(Y), \sigma(Y)$.

2) Обчислити кореляційний момент $K(X,Y)$ і коефіцієнт кореляції $\rho(X,Y)$.

3) Побудувати умовні закони розподілу $X/_{Y=y_2}$; $Y/_{X=x_3}$.

4) Обчислити умовні математичні сподівання $M\left(X/_{Y=y_2}\right), M\left(Y/_{X=x_3}\right)$ та дисперсії $D\left(X/_{Y=y_2}\right), D\left(Y/_{X=x_3}\right)$.

6. В результаті вибіркового аналізу добової кількості аварій водопровідної системи на території району одержали певну вибірку

0	2	4	5	6
2	1	2	0	4
3	4	3	4	2
1	2	0	4	4
4	4	2	5	1

Для цієї вибірки потрібно:

а) побудувати дискретний розподіл частот;

б) побудувати полігон частот;

в) знайти вибіркову середню $\overline{x}$;

г) знайти виправлену вибіркову дисперсію s^2;

д) знайти емпіричну функцію розподілу $F^*(x)$ і побудувати її графік.

Варіант 2

1. Студент прийшов складати іспит, знаючи з 50 питань програми лише 36. Яка ймовірність того, що студент відповість хоча б на одне із даних йому трьох запитань?

2. Імовірність присутності студента на занятті дорівнює 0,9. Чому дорівнює найімовірніше число студентів, присутніх на занятті, якщо всього у групі 35 студентів?

3. За даним законом розподілу дискретної випадкової величини X

X	-2	-1	0	1	3	4
P	0,15	0,2	0,25	0,2	0,15	0,05

побудувати многокутник розподілу. Знайти $M(X), D(X)$ і $\sigma(X)$.

4. Випадкова величина X задана функцією розподілу ймовірностей $F(x)$:

$$F(x)=\begin{cases}0, \; x \le 0, \\ \dfrac{x^2}{4}, \; 0 < x \le 2, \\ 1, \; x > 2.\end{cases}$$

Потрібно: а) знайти щільність розподілу ймовірностей $f(x)$;

б) побудувати графіки функцій $F(x)$ і $f(x)$;

в) знайти $M(X)$ і дисперсію випадкової величини X;

г) знайти ймовірність того, що в результаті проведення випробування випадкова величина набуде значення з інтервалу $(\alpha, \beta) = (1, 2)$.

5. Закон розподілу двовимірної дискретної випадкової величини (X, Y) задано відповідною таблицею

X/Y	4	6	8	10
1	0,1	0,05	0,15	0,1
4	0,15	0,3	0,05	0,1

Потрібно:

1) Знайти числові характеристики складових системи: $M(X), D(X), \sigma(X)$ та $M(Y), D(Y), \sigma(Y)$.

2) Обчислити кореляційний момент $K(X,Y)$ і коефіцієнт кореляції $\rho(X,Y)$.

3) Побудувати умовні закони розподілу $X/Y = y_2$; $Y/X = x_3$.

4) Обчислити умовні математичні сподівання $M\left(X/Y = y_2\right), M\left(Y/X = x_3\right)$ та дисперсії $D\left(X/Y = y_2\right), D\left(Y/X = x_3\right)$.

6. В результаті вибіркового аналізу добової кількості аварій водопровідної системи на території району одержали певну вибірку

6	4	6	6	2
2	1	4	0	5
2	0	3	2	1
1	2	1	4	4
4	4	2	2	6

Для цієї вибірки потрібно:

а) побудувати дискретний розподіл частот;

б) побудувати полігон частот;

в) знайти вибіркову середню $\bar{x}$;

г) знайти виправлену вибіркову дисперсію s^2;

д) знайти емпіричну функцію розподілу $F^*(x)$ і побудувати її графік.

Варіант 3

1. Підприємство виготовляє 98% стандартних виробів, причому 85% із них вищого сорту. Знайти ймовірність того, що взятий навмання виріб буде вищого сорту.

2. Два економісти заповнюють документи і складають їх у спільну папку. Ймовірність зробити помилку для першого економіста дорівнює 0,1, для другого – 0,2. Перший економіст заповнив 40 документів, другий – 60. Під час перевірки навмання взятий з папки документ виявився з помилкою. Знайти ймовірність того, що його заповнив перший економіст.

3. За даним законом розподілу дискретної випадкової величини X

X	-3	-1	0	1	3	5
P	0,13	0,17	0,2	0,3	0,18	0,02

побудувати многокутник розподілу. Знайти $M(X)$, $D(X)$ і $\sigma(X)$.

4. Випадкова величина X задана функцією розподілу ймовірностей $F(x)$:

$$F(x)=\begin{cases}0,\ x\le 3,\\ \dfrac{x^2-9}{27},\ 3<x\le 6,\\ 1,\ x>6.\end{cases}$$

Потрібно: а) знайти щільність розподілу ймовірностей $f(x)$;

б) побудувати графіки функцій $F(x)$ і $f(x)$;

в) знайти $M(X)$ і дисперсію випадкової величини X;

г) знайти ймовірність того, що в результаті проведення випробування випадкова величина набуде значення з інтервалу $(\alpha,\ \beta)=(4,\ 5)$.

5. Закон розподілу двовимірної дискретної випадкової величини (X, Y) задано відповідною таблицею

X/Y	1	3	5	7
3	0,05	0,05	0,1	0,1
4	0,2	0,35	0,05	0,1

Потрібно:

1) Знайти числові характеристики складових системи: $M(X), D(X), \sigma(X)$ та $M(Y), D(Y), \sigma(Y)$.

2) Обчислити кореляційний момент $K(X,Y)$ і коефіцієнт кореляції $\rho(X,Y)$.

3) Побудувати умовні закони розподілу $X/Y = y_2$; $Y/X = x_3$.

4) Обчислити умовні математичні сподівання $M\left(X/Y = y_2\right), M\left(Y/X = x_3\right)$ та дисперсії $D\left(X/Y = y_2\right), D\left(Y/X = x_3\right)$.

6. В результаті вибіркового аналізу добової кількості аварій водопровідної системи на території району одержали певну вибірку

$$\begin{matrix} 1 & 4 & 5 & 0 & 6 \\ 5 & 1 & 4 & 6 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 5 & 4 & 0 \\ 4 & 5 & 2 & 5 & 6 \end{matrix}$$

Для цієї вибірки потрібно:

а) побудувати дискретний розподіл частот;

б) побудувати полігон частот;

в) знайти вибіркову середню $\overline{x}$;

г) знайти виправлену вибіркову дисперсію s^2;

д) знайти емпіричну функцію розподілу $F^*(x)$ і побудувати її графік.

Варіант 4

1. При стрільбі з автоматичної зброї відносна частота влучень в ціль дорівнює 0,95. Знайти число влучень, якщо зроблено 160 пострілів.

2. Є 7 стандартних та 3 нестандартні деталі. Навмання беруть 3 із них із поверненням. Знайти ймовірність того, що серед узятих деталей немає стандартних.

3. За даним законом розподілу дискретної випадкової величини X

X	2	4	7	9	12	15
P	0,05	0,15	0,35	0,2	0,15	0,1

побудувати многокутник розподілу. Знайти $M(X)$, $D(X)$ і $\sigma(X)$.

4. Випадкова величина X задана функцією розподілу ймовірностей $F(x)$:

$$F(x)=\begin{cases}0, \; x\le 2,\\ \dfrac{x^2-4}{21}, \; 2<x\le 5,\\ 1, \; x>5.\end{cases}$$

Потрібно: а) знайти щільність розподілу ймовірностей $f(x)$;

б) побудувати графіки функцій $F(x)$ і $f(x)$;

в) знайти $M(X)$ і дисперсію випадкової величини X;

г) знайти ймовірність того, що в результаті проведення випробування випадкова величина набуде значення з інтервалу $(\alpha, \beta)=(3, 4)$.

5. Закон розподілу двовимірної дискретної випадкової величини (X, Y) задано відповідною таблицею

$X \diagup Y$	2	5	6	8
1	0,15	0,05	0,1	0,1
4	0,25	0,2	0,05	0,1

Потрібно:

1) Знайти числові характеристики складових системи: $M(X), D(X), \sigma(X)$ та $M(Y), D(Y), \sigma(Y)$.

2) Обчислити кореляційний момент $K(X,Y)$ і коефіцієнт кореляції $\rho(X,Y)$.

3) Побудувати умовні закони розподілу $X/Y=y_2$; $Y/X=x_3$.

4) Обчислити умовні математичні сподівання $M\left(X/Y=y_2\right), M\left(Y/X=x_3\right)$ та дисперсії $D\left(X/Y=y_2\right), D\left(Y/X=x_3\right)$.

6. В результаті вибіркового аналізу добової кількості аварій водопровідної системи на території району одержали певну вибірку

6	2	3	3	4
1	2	2	1	6
4	0	3	4	3
2	3	1	2	4
5	3	5	3	6

Для цієї вибірки потрібно:

а) побудувати дискретний розподіл частот;

б) побудувати полігон частот;

в) знайти вибіркову середню $\overline{x}$;

г) знайти виправлену вибіркову дисперсію s^2;

д) знайти емпіричну функцію розподілу $F^*(x)$ і побудувати її графік.

Варіант 5

1. Для руйнування моста достатньо влучення однієї авіаційної бомби. Знайти ймовірність того, що міст буде зруйновано, якщо на нього скинули 3 бомби та ймовірності влучення яких відповідно дорівнюють 0,6; 0,7 та 0,9.

2. Деталь може надійти для обробки на перший верстат з ймовірністю 0,8, а на другий верстат – з ймовірністю 0,2. При обробці деталі на першому й другому верстатах ймовірність допустити брак відповідно дорівнює 0,01 і 0,02.

Оброблені деталі складають в одному приміщенні. Навмання взята деталь виявилась бракованою. Знайти ймовірність того, що вона оброблялась на першому верстаті.

3. За даним законом розподілу дискретної випадкової величини X

X	3	4	7	9	12	14
P	0,1	0,3	0,2	0,05	0,15	0,2

побудувати многокутник розподілу. Знайти $M(X), D(X)$ і $\sigma(X)$.

4. Випадкова величина X задана функцією розподілу ймовірностей $F(x)$:

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 2,\\ \dfrac{x^3-4x}{15}, & 2<x\le 3,\\ 1, & x>3.\end{cases}$$

Потрібно: а) знайти щільність розподілу ймовірностей $f(x)$;

б) побудувати графіки функцій $F(x)$ і $f(x)$;

в) знайти $M(X)$ і дисперсію випадкової величини X;

г) знайти ймовірність того, що в результаті проведення випробування випадкова величина набуде значення з інтервалу $(\alpha, \beta)=(2{,}5; 4)$.

5. Закон розподілу двовимірної дискретної випадкової величини (X, Y) задано відповідною таблицею

X/Y	4	5	7	8
2	0,2	0,05	0	0,1
5	0,2	0,3	0,05	0,1

Потрібно:

1) Знайти числові характеристики складових системи: $M(X), D(X), \sigma(X)$ та $M(Y), D(Y), \sigma(Y)$.

2) Обчислити кореляційний момент $K(X,Y)$ і коефіцієнт кореляції $\rho(X,Y)$.

3) Побудувати умовні закони розподілу $X/Y = y_2$; $Y/X = x_3$.

4) Обчислити умовні математичні сподівання $M\left(X/Y = y_2\right)$, $M\left(Y/X = x_3\right)$ та дисперсії $D\left(X/Y = y_2\right)$, $D\left(Y/X = x_3\right)$.

6. В результаті вибіркового аналізу добової кількості аварій водопровідної системи на території району одержали певну вибірку

1	0	2	4	0
0	2	3	0	5
2	6	1	5	2
1	0	2	3	1
3	2	4	2	5

Для цієї вибірки потрібно:

а) побудувати дискретний розподіл частот;

б) побудувати полігон частот;

в) знайти вибіркову середню $\overline{x}$;

г) знайти виправлену вибіркову дисперсію s^2;

д) знайти емпіричну функцію розподілу $F^*(x)$ і побудувати її графік.

Варіант 6

1. Кожен із трьох стрільців виконує один постріл по мішені. Ймовірності їхнього влучення в мішень відповідно дорівнюють 0,6; 0,7 та 0,8. Знайти ймовірність того, що результатом цих трьох пострілів буде тільки:

а) одне влучення;

б) хоча б одне влучення.

2. Схожість насіння становить 60%. Яка ймовірність того, що з чотирьох посіяних насінин зійде дві?

3. За даним законом розподілу дискретної випадкової величини X

X	-5	-4	0	1	2	4
P	0,15	0,2	0,25	0,2	0,15	0,05

побудувати многокутник розподілу. Знайти $M(X), D(X)$ і $\sigma(X)$.

4. Випадкова величина X задана функцією розподілу ймовірностей $F(x)$:

$$F(x)=\begin{cases}0, \ x\le -1,\\ \dfrac{(x+1)^3}{8}, \ -1<x\le 1,\\ 1, \ x>1.\end{cases}$$

Потрібно: а) знайти щільність розподілу ймовірностей $f(x)$;

б) побудувати графіки функцій $F(x)$ і $f(x)$;

в) знайти $M(X)$ і дисперсію випадкової величини X;

г) знайти ймовірність того, що в результаті проведення випробування випадкова величина набуде значення з інтервалу $(\alpha, \beta)=(0;1)$.

5. Закон розподілу двовимірної дискретної випадкової величини (X, Y) задано відповідною таблицею

X/Y	1	4	7	12
3	0,15	0,05	0,1	0,1
5	0,25	0,2	0,05	0,1

Потрібно:

1) Знайти числові характеристики складових системи: $M(X), D(X), \sigma(X)$ та $M(Y), D(Y), \sigma(Y)$.

2) Обчислити кореляційний момент $K(X,Y)$ і коефіцієнт кореляції $\rho(X,Y)$.

3) Побудувати умовні закони розподілу $X/Y=y_2$; $Y/X=x_3$.

4) Обчислити умовні математичні сподівання $M\left(X/Y=y_2\right), M\left(Y/X=x_3\right)$ та дисперсії $D\left(X/Y=y_2\right), D\left(Y/X=x_3\right)$.

6. В результаті вибіркового аналізу добової кількості аварій водопровідної системи на території району одержали певну вибірку

$$\begin{matrix} 2 & 4 & 6 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 5 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 3 & 4 & 4 \\ 4 & 1 & 6 & 2 & 6 \\ 0 & 2 & 2 & 4 & 4 \end{matrix}$$

Для цієї вибірки потрібно:

а) побудувати дискретний розподіл частот;

б) побудувати полігон частот;

в) знайти вибіркову середню $\overline{x}$;

г) знайти виправлену вибіркову дисперсію s^2;

д) знайти емпіричну функцію розподілу $F^*(x)$ і побудувати її графік.

Варіант 7

1. Після бурі на ділянці між 20-м та 45-м кілометрами лінії електропередачі відбувся обрив проводу. Яка ймовірність того, що обрив відбувся між 30-м і 40-м кілометрами лінії?

2. Два економісти заповнюють документи і складають їх у спільну папку. Ймовірність зробити помилку для першого економіста дорівнює 0,1, для другого – 0,2. Перший економіст заповнив 40 документів, другий – 60. Знайти ймовірність того, що навмання взятий з папки документ буде з помилкою.

3. За даним законом розподілу дискретної випадкової величини X

X	1	4	8	9	12	13
P	0,13	0,17	0,2	0,3	0,18	0,02

побудувати многокутник розподілу. Знайти $M(X)$, $D(X)$ і $\sigma(X)$.

4. Випадкова величина X задана функцією розподілу ймовірностей $F(x)$:

$$F(x)=\begin{cases}0, \ x\le 1,\\ \dfrac{x^2-1}{3}, 1<x\le 2,\\ 1, \ x>2.\end{cases}$$

Потрібно: а) знайти щільність розподілу ймовірностей $f(x)$;

б) побудувати графіки функцій $F(x)$ і $f(x)$;

в) знайти $M(X)$ і дисперсію випадкової величини X;

г) знайти ймовірність того, що в результаті проведення випробування випадкова величина набуде значення з інтервалу $(\alpha, \beta)=(1{,}5;\ 2)$.

5. Закон розподілу двовимірної дискретної випадкової величини (X, Y) задано відповідною таблицею

X/Y	4	6	7	9
5	0,15	0,05	0,2	0,15
6	0,2	0,1	0,05	0,1

Потрібно:

1) Знайти числові характеристики складових системи: $M(X), D(X), \sigma(X)$ та $M(Y), D(Y), \sigma(Y)$.

2) Обчислити кореляційний момент $K(X,Y)$ і коефіцієнт кореляції $\rho(X,Y)$.

3) Побудувати умовні закони розподілу $X/Y=y_2$; $Y/X=x_3$.

4) Обчислити умовні математичні сподівання $M\left(X/Y=y_2\right), M\left(Y/X=x_3\right)$ та дисперсії $D\left(X/Y=y_2\right), D\left(Y/X=x_3\right)$.

6. В результаті вибіркового аналізу добової кількості аварій водопровідної системи на території району одержали певну вибірку

4 5 1 5 6

3 4 3 0 1

5 1 4 4 0

1 4 1 2 4

4 2 4 3 5

Для цієї вибірки потрібно:

а) побудувати дискретний розподіл частот;

б) побудувати полігон частот;

в) знайти вибіркову середню $\overline{x}$;

г) знайти виправлену вибіркову дисперсію s^2;

д) знайти емпіричну функцію розподілу $F^*(x)$ і побудувати її графік.

Варіант 8

1. Підприємство виготовляє 99% стандартних виробів, причому 70% із них – вищого сорту. Знайти ймовірність того, що взятий навмання виріб буде вищого сорту.

2. Імовірність присутності студента на занятті дорівнює 0,7. Чому дорівнює найімовірніше число студентів, присутніх на занятті, якщо в групі 32 студенти.

3. За даним законом розподілу дискретної випадкової величини X

X	-2	-1	0	1	4	6
P	0,12	0,28	0,22	0,18	0,12	0,08

побудувати многокутник розподілу. Знайти $M(X)$, $D(X)$ і $\sigma(X)$.

4. Випадкова величина X задана функцією розподілу ймовірностей $F(x)$:

$$F(x) = \begin{cases} 0, \ x \le 2, \\ (x-2)^2, \ 2 < x \le 3, \\ 1, \ x > 3. \end{cases}$$

Потрібно: а) знайти щільність розподілу ймовірностей $f(x)$;

б) побудувати графіки функцій $F(x)$ і $f(x)$;

в) знайти $M(X)$ і дисперсію випадкової величини X;

г) знайти ймовірність того, що в результаті проведення випробування випадкова величина набуде значення з інтервалу $(\alpha,\ \beta) = (1;\ 2{,}5)$.

5. Закон розподілу двовимірної дискретної випадкової величини (X, Y) задано відповідною таблицею

X/Y	5	8	10	12
7	0,1	0,05	0,15	0,1
12	0,15	0,3	0,05	0,1

Потрібно:

1) Знайти числові характеристики складових системи: $M(X), D(X), \sigma(X)$ та $M(Y), D(Y), \sigma(Y)$.

2) Обчислити кореляційний момент $K(X,Y)$ і коефіцієнт кореляції $\rho(X,Y)$.

3) Побудувати умовні закони розподілу $X/Y = y_2$; $Y/X = x_3$.

4) Обчислити умовні математичні сподівання $M\left(X/Y = y_2\right), M\left(Y/X = x_3\right)$ та дисперсії $D\left(X/Y = y_2\right), D\left(Y/X = x_3\right)$.

6. В результаті вибіркового аналізу добової кількості аварій водопровідної системи на території району одержали певну вибірку

$$\begin{matrix} 2 & 0 & 5 & 4 & 3 \\ 5 & 3 & 4 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 4 & 3 & 6 \\ 5 & 2 & 3 & 0 & 3 \end{matrix}$$

Для цієї вибірки потрібно:

а) побудувати дискретний розподіл частот;

б) побудувати полігон частот;

в) знайти вибіркову середню $\overline{x}$;

г) знайти виправлену вибіркову дисперсію s^2;

д) знайти емпіричну функцію розподілу $F^*(x)$ і побудувати її графік.

Варіант 9

1. Студент прийшов складати іспит, знаючи з 50 питань програми лише 36. Яка ймовірність того, що студент не відповість на всі три запропоновані йому запитання?

2. Схожість насіння становить 60%. Яка ймовірність того, що з чотирьох посіяних насінин зійдуть усі чотири ?

3. За даним законом розподілу дискретної випадкової величини X

X	-7	-5	-2	1	5	9
P	0,13	0,17	0,2	0,3	0,18	0,02

побудувати многокутник розподілу. Знайти $M(X)$, $D(X)$ і $\sigma(X)$.

4. Випадкова величина X задана функцією розподілу ймовірностей $F(x)$:

$$F(x) = \begin{cases} 0, \ x \le 0, \\ \dfrac{x^3 + x^2}{2}, \ 0 < x \le 1, \\ 1, \ x > 1. \end{cases}$$

Потрібно: а) знайти щільність розподілу ймовірностей $f(x)$;

б) побудувати графіки функцій $F(x)$ і $f(x)$;

в) знайти $M(X)$ і дисперсію випадкової величини X;

г) знайти ймовірність того, що в результаті проведення випробування випадкова величина набуде значення з інтервалу $(\alpha, \beta) = (0{,}5; 2)$.

5. Закон розподілу двовимірної дискретної випадкової величини (X, Y) задано відповідною таблицею

X/Y	5	7	10	14
2	0,25	0,25	0	0,05
8	0,2	0,1	0,05	0,1

Потрібно:

1) Знайти числові характеристики складових системи: $M(X), D(X), \sigma(X)$ та $M(Y), D(Y), \sigma(Y)$.

2) Обчислити кореляційний момент $K(X,Y)$ і коефіцієнт кореляції $\rho(X,Y)$.

3) Побудувати умовні закони розподілу $X/_{Y=y_2}$; $Y/_{X=x_3}$.

4) Обчислити умовні математичні сподівання $M\left(X/_{Y=y_2}\right), M\left(Y/_{X=x_3}\right)$ та дисперсії $D\left(X/_{Y=y_2}\right), D\left(Y/_{X=x_3}\right)$.

6. В результаті вибіркового аналізу добової кількості аварій водопровідної системи на території району одержали певну вибірку

$$\begin{array}{ccccc} 2 & 6 & 5 & 1 & 6 \\ 1 & 3 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 2 & 3 & 5 \\ 2 & 5 & 6 & 0 & 2 \\ 5 & 1 & 3 & 2 & 4 \end{array}$$

Для цієї вибірки потрібно:

а) побудувати дискретний розподіл частот;

б) побудувати полігон частот;

в) знайти вибіркову середню $\overline{x}$;

г) знайти виправлену вибіркову дисперсію s^2;

д) знайти емпіричну функцію розподілу $F^*(x)$ і побудувати її графік.

Варіант 10

1. В урні 7 білих і 3 чорних кулі. Навмання одну за одною виймають дві кулі з поверненням. Знайти ймовірність того, що вийняті кулі одного кольору.

2. На склад автомашинами завозиться 75% скляних банок, а решта – залізницею. Ймовірність розбивання скляних банок при транспортуванні на автомашинах дорівнює 0,03, а при транспортуванні залізницею – утричі менше. Узята навмання на складі банка виявилась розбитою. Визначити ймовірність того, що вона привезена залізницею.

3. За даним законом розподілу дискретної випадкової величини X

X	-3	-2	0	1	2	4
P	0,13	0,17	0,2	0,3	0,18	0,02

побудувати многокутник розподілу. Знайти $M(X), D(X)$ і $\sigma(X)$.

4. Випадкова величина X задана функцією розподілу ймовірностей $F(x)$:

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le -1,\\ \left(x^2-1\right)^2, & -1<x\le 0,\\ 1, & x>0.\end{cases}$$

Потрібно: а) знайти щільність розподілу ймовірностей $f(x)$;

б) побудувати графіки функцій $F(x)$ і $f(x)$;

в) знайти $M(X)$ і дисперсію випадкової величини X;

г) знайти ймовірність того, що в результаті проведення випробування випадкова величина набуде значення з інтервалу $(\alpha,\ \beta)=(-1;-0{,}5)$.

5. Закон розподілу двовимірної дискретної випадкової величини (X, Y) задано відповідною таблицею

X/Y	6	8	9	10
7	0,15	0,05	0,1	0,1
10	0,25	0,2	0,05	0,1

Потрібно:

1) Знайти числові характеристики складових системи: $M(X), D(X), \sigma(X)$ та $M(Y), D(Y), \sigma(Y)$.

2) Обчислити кореляційний момент $K(X,Y)$ і коефіцієнт кореляції $\rho(X,Y)$.

3) Побудувати умовні закони розподілу $X/Y = y_2$; $Y/X = x_3$.

4) Обчислити умовні математичні сподівання $M\left(X/Y = y_2\right), M\left(Y/X = x_3\right)$ та дисперсії $D\left(X/Y = y_2\right), D\left(Y/X = x_3\right)$.

6. В результаті вибіркового аналізу добової кількості аварій водопровідної системи на території району одержали певну вибірку

0	5	4	5	1
6	3	0	1	4
4	4	2	3	4
0	5	3	0	3
2	3	4	4	5

Для цієї вибірки потрібно:

а) побудувати дискретний розподіл частот;

б) побудувати полігон частот;

в) знайти вибіркову середню $\overline{x}$;

г) знайти виправлену вибіркову дисперсію s^2;

д) знайти емпіричну функцію розподілу $F^*(x)$ і побудувати її графік.

Додаткові завдання

Варіант 1

1. Серед 25 фірм, з яких 10 українських, а інші польські, розігрується 5 урядових контрактів. Вважається, що кожна фірма має рівні шанси для отримання контракту. Знайти ймовірність того, що принаймні дві українські фірми виграють контракт.

2. До авіакаси у випадковий час у межах 10 хвилин звернулись 2 пасажири. Обслуговування одного пасажира триває дві хвилини. Знайти ймовірність того, що пасажир, який звернувся другим, буде вимушений зачекати.

3. Серед виробів, які випускаються заводом, 96 % відповідають стандарту. Спрощена схема контролю визнає доброякісною стандартну продукцію з ймовірністю 0,98 і нестандартну – з ймовірністю 0,05. Знайти:

а) ймовірність того, що навмання взятий виріб пройде спрощений контроль;

б) за умови проходження спрощеного контролю ймовірність того, що він відповідає стандарту.

4. Серед великої кількості виробів, що знаходяться в комплекті, 30 відсотків – нестандартні. Знайти ймовірності того, що серед 5 виробів, навмання взятих із комплекту, буде: а) тільки один нестандартний; б) принаймні один нестандартний.

Зауваження. Завдання бажано також виконувати із застосуванням програмного продукту Microsoft Excel.

Варіант 2

1. У фірмі десять співробітників (6 чоловіків та 4 жінки) претендують на заміщення трьох вакансій. Вважають, що всі кандидатури мають рівні шанси на зайняття цих вакансій. Знайти ймовірність того, що жінки не займуть жодної вакансії.

2. Відділ технічного контролю поліграфічного видавництва виявив 5 бракованих книжок у партії з випадково відібраних 250 книжок. Знайти відносну частоту появи бракованих книжок.

3. Інвестор вкладає свої гроші в акції без ризику, в акції допустимого ризику та акції великого ризику в пропорціях 10 %, 30 %, 60 %. Імовірність отримання прибутку від цих акцій складають 1; 0,75 та 0,6 відповідно. Знайти:

а) імовірність того, що інвестор отримає прибуток;

б) якщо інвестор отримав прибуток, то яка ймовірність того, що він отриманий від акцій без ризику?

4. Імовірність того, що кожен клієнт, який звернувся в авіакасу, замовить квиток до аеропорту N, дорівнює 0,1. Знайти ймовірності того, що із 100 клієнтів, що звернулись в касу, замовлять квиток до аеропорту N: а) менше 15 осіб; б) від 5 до 12 осіб; в) більше 20осіб.

Зауваження. Завдання бажано також виконувати із застосуванням програмного продукту Microsoft Excel.

Варіант 3

1. У групі з 12 бізнесменів тільки 8 мають досвід роботи у запропонованій новій галузі. Для проекту потрібно відібрати 4 особи. За припущення, що відбір претендентів проводять навмання, знайти ймовірність того, що в команду з чотирьох чоловік потраплять всі, хто має досвід роботи.

2. Два літаки прибувають у зону аеропорту у випадковий час між 12.00 і 12.30. Знайти ймовірність того, що літак, який прибув другим, не буде вимушений чекати дозволу на посадку, якщо чергову посадку можна здійснювати не раніше, ніж за 10 хвилин після попередньої.

3. Видавничо-поліграфічний інститут провів обстеження працевлаштування своїх випускників. Імовірність того, що людина, яка працює в сфері бізнесу та має прибуток вище N грн, становить 0,9, а поза сферою бізнесу – 0,3. З'ясовано, що 80 % випускників працюють в сфері бізнесу. Знайти:

а) імовірність того, що навмання обраний випускник має прибуток вище N гривень;

б) за умови отримання прибутку випускником вище N гривень якою є ймовірність, що він працює в сфері бізнесу?

4. На біржі виставлено 10 цінних паперів. Імовірність того, що вони подорожчають протягом одного дня, дорівнює 0,6. Знайти ймовірності того, що подорожчає: а) рівно 5 паперів; б) не більше, ніж 4 папери; в) 3−5 цінних паперів.

Зауваження. Завдання бажано також виконувати із застосуванням програмного продукту Microsoft Excel.

Варіант 4

1. Комплект містить 7 виробів першого сорту, 6 –другого сорту і 2 вироби – третього сорту. Навмання обирають 5 виробів. Знайти ймовірність того, що серед них не виявиться виробів 3-го сорту.

2. У рівнобедреному трикутнику з бічною стороною 5 см та кутом при вершині 120°, довільно розміщено квадрат із стороною 1,5 см. Знайти ймовірність того, що навмання вибрана точка трикутника лежатиме в квадраті.

3. Задачу розв'язують самостійно 2 відмінники, 3 посередні студенти та 5 студентів, що навчаються добре. Ймовірність розв'язання задачі відмінником дорівнює 0,9; студентом, який вчиться добре, – 0,8 та посереднім – 0,5. До дошки навмання викликають одного зі студентів.

1) Знайти ймовірність того, що він розв'язав задачу.

2) Викликаний студент розв'язав задачу. Знайти ймовірність того, що він: а) відмінник; б) студент із середнім рівнем успішності.

4. Авіакомпанія виконує протягом місяця 400 рейсів. Імовірність повного комерційного завантаження кожного рейсу дорівнює 0,8. Знайти ймовірності того, що протягом місяця з повним комерційним завантаженням буде виконано: а) не менше 300 рейсів; б) більша частина рейсів.

Зауваження. Завдання бажано також виконувати із застосуванням програмного продукту Microsoft Excel.

Варіант 5

1. Із 15 рейсів, що виконуються з аеропорту протягом доби, 60% рейсів виконуються на власному літаковому парку. Знайти ймовірність того, що з вибраних навмання 5 рейсів рівно 3 виконуються на власному парку.

2. На відрізку довжиною 15 см випадково поставлено дві точки. Знайти ймовірність того, що відстань між цими точками не перевищує 7 см.

3. Податкові інспектори роблять перевірку діяльності підприємств. Перший інспектор обслуговує 40 підприємств, серед яких 25 % не мають заборгованостей, другий – 60 підприємств, із них 40 % без заборгованостей. Знайти ймовірність того, що навмання обране підприємство:

а) не має заборгованості;

б) підприємство, що не має заборгованості, перевіряв перший інспектор.

4. За статистичними даними у середньому 1% пасажирів відмовляється від рейсу. Знайти ймовірності того, що з 300 пасажирів, що мають квитки на рейс, відмовляться від польоту: а) не більше 5 пасажирів; б) не менше 3 пасажирів.

Зауваження. Завдання бажано також виконувати із застосуванням програмного продукту Microsoft Excel.

Варіант 6

1. 12 виробів, серед яких 4 нестандартних, випадковим способом розбиваються на дві рівні партії. Знайти ймовірності того, що: а) у кожній партії буде рівна кількість нестандартних виробів; б) усі нестандартні вироби будуть в одній партії.

2. Відстань між пунктами M і N літак долає за 1 годину, а потяг – за 18 годин. Потяг у випадковий час протягом доби вирушає з пункту M до N. Знайти ймовірність того, що черговий літак прибуде до пункту N раніше від потяга, якщо між M і N виконується за розкладом один рейс літака щодоби.

3. Фабрика виготовляє однотипну продукцію на трьох конвеєрних лініях, які мають однакову продуктивність. На першій лінії виробляється продукція тільки першого сорту, на другій лінії продукція першого сорту становить 90 %, а на третій – 85 %. Знайти ймовірність того, що:

а) випадковим способом узятий виріб буде першосортним;

б) випадково взятий виріб виявився першосортним і його виготовлено на третій лінії.

4. Інвестор укладає угоди на фондовій біржі. Ймовірність укладання однієї угоди за день дорівнює 0,7. Виходячи із припущення, що протягом 10 робочих днів укладається не більше однієї угоди в день, знайти ймовірності подій: а) буде укладено 7 угод; б) буде укладено не менше 8 угод; в) жодної угоди не буде укладено.

Зауваження. Завдання бажано також виконувати із застосуванням програмного продукту Microsoft Excel.

Варіант 7

1. У конкурсі газети бере участь 12 чоловіків та 8 жінок. Є два призових місця. За припущення, що відбір претендентів ведуть навмання, яка ймовірність того, що обидва місця займуть жінки?

2. У ромбі з стороною 5 см та гострим кутом $60°$ лежить прямокутник зі сторонами 2 та 3 см. Знайти ймовірність того, що навмання вибрана у ромбі точка лежатиме і в прямокутнику.

3. Менеджер з інвестицій передбачає три варіанти розвитку економічної ситуації на наступний рік: високе зростання, відсутність зростання та спад. Імовірності цих подій становлять 0,6; 0,3 та 0,1 відповідно. Очікується отримання прибутку з наявного активу. Імовірність отримання прибутку становить: випадок високого зростання – 0,8; випадок відсутності зростання – 0,6; випадок спаду – 0,1. Знайти ймовірність того, що

а) буде отримано прибуток з наявного активу.

б) цей прибуток з наявного активу отримано в умовах високого зростання економіки?

4. Кількість помилок у рахунках торгових підприємств становить 5 %. Аудитор перевіряє 10 навмання вибраних рахунків. Якщо не виявиться жодної помилки, то рахунки підприємства далі не перевіряються. Яка ймовірність того, що в 10 рахунках підприємства: а) не буде жодної помилки; б) буде 3 помилки; в) буде 3−5 помилок.

Зауваження. Завдання бажано також виконувати із застосуванням програмного продукту Microsoft Excel.

Варіант 8

1. З 10 літаків, що прибувають в аеропорт протягом доби, 80% мають повне комерційне завантаження. Знайти ймовірність того, що серед 5 випадковим способом узятих літаків тільки 4 мають повне завантаження.

2. З проміжку $[0,1]$ випадковим способом вибирають два дійсних числа. Знайти ймовірність того, що їхня сума не більша 1, а добуток не перевищує $2/9$.

3. Книжковий склад одержує від першого поліграфічного підприємства в 4 рази більше книжок, ніж від другого. Брак продукції першого підприємства складає 4 %, а другого – 8 %.

а) Знайти ймовірність того, що випадковим способом вибрана книжка виявиться бракованою.

б) Випадковим способом узята книжка виявилась бракованою. Яким підприємством вона більш ймовірно виготовлена?

4. Телефонна станція обслуговує 2000 абонентів. Імовірність того, що будь-який абонент зателефонує на станцію протягом години, дорівнює 0,001. Знайти ймовірності того, що протягом години на телефонну станцію зателефонують: а) 5 абонентів; б) не більше 3 абонентів.

Зауваження. Завдання бажано також виконувати із застосуванням програмного продукту Microsoft Excel.

Варіант 9

1. В авіакасі було 15 квитків, серед яких 6 квитків до пункту *A*. До кінця зміни продано 8 квитків. Знайти ймовірність того, що в касі не залишилося квитків до пункту *A,* якщо ймовірність продажу кожного квитка однакова.

2. Кожне з двох дійсних додатних чисел не більше 4. Знайти ймовірність того, що їх добуток також буде не більше 4.

3. Два робітники виготовили по однаковій кількості деталей. Брак продукції, виготовленої першим робітником, складає 5 %, а другим – 1%.

а) Знайти ймовірність того, що узята навмання деталь буде бракованою.

б) Відділ технічного контролю виявив браковану деталь. Яка ймовірність того, що вона виготовлена першим робітником?

4. Імовірність того, що інвестиційний проект принесе через рік прибуток дорівнює 0,8. Знайти ймовірності того, що із 15 інвестиційних проектів: а) 10 проектів виявляться прибутковими; б) не менше 8 проектів виявляться прибутковими; в) 5−9 проектів будуть прибутковими.

Зауваження. Завдання бажано також виконувати із застосуванням програмного продукту Microsoft Excel.

Варіант 10

1. Партія з 30 виробів містить 10% браку. Знайти ймовірність того, що серед 7 виробів, узятих випадково: а) тільки 2 бракованих; б) жодного бракованого.

2. Всередині кола радіусом 5 мм розташовано прямокутник зі сторонами 4 та 6 мм. Знайти ймовірність того, що навмання вибрана у крузі точка лежатиме і в прямокутнику.

3. На фабриці перша машина виробляє 40 %, а друга – 60 % усієї продукції. У середньому 9 з 1000 одиниць продукції, виготовленої першою машиною, виявляється браком, а для другої машини брак становить 2 одиниці на 500 одиниць продукції.

а) Знайти ймовірність браку продукції, виготовленої на фабриці.

б) Деяка одиниця продукції, яка вибрана випадковим способом із даної продукції фабрики, виявилася браком. На якій з машин вона більш ймовірно виготовлена?

4. Фабрика випускає 75 % продукції першим сортом. Знайти ймовірність того, що із 300 виробів, виготовлених фабрикою, кількість першосортних виробів буде: а) 250 виробів; б) 220−235; в) не більше 200.

Зауваження. Завдання бажано також виконувати із застосуванням програмного продукту Microsoft Excel.

2.2. Розв’язування прикладів (із використанням Microsoft Excel)

2.2.1. Формули повної ймовірності та Байєса

Якщо подія *А* має складну структуру, тоді пряме знаходження її ймовірності може виявитись надто важким завданням (наприклад, за класичним означенням з використанням комбінаторного аналізу). Тому виникає питання, чи не можна подію *А* розглянути з іншими подіями, ймовірності яких відомі, та, на основі розглянутих подій, знайти ймовірність події *А*? Виявляється, що в багатьох випадках це є можливим, і відповідь на поставлене питання дає формула повної ймовірності.

Теорема *(формула повної ймовірності*). *Нехай випадкова подія А може відбуватись лише сумісно з однією із несумісних між собою подій* $H_1, H_2, \ldots, H_n$, *що утворюють повну групу* $\left(\bigcup_{i=1}^{n} H_i = \Omega, H_i \cap H_j = \varnothing \text{ при } i \neq j \right)$, *які називають гіпотезами,* $P(H_i) > 0$, $(i = 1, 2, \ldots, n)$. *Тоді ймовірність події А обчислюють за формулою*

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i) P\left(A \mid H_i \right). \qquad (2.1)$$

Отже, ймовірність події *А* дорівнює сумі добутків ймовірностей гіпотез на умовні ймовірності події *А* за цих гіпотез.

Якщо до випробування відомі апріорні ймовірності гіпотез $P(H_1), P(H_2), \ldots, P(H_n)$, а в результаті випробування настала подія *А*, і $P(A) > 0$, то з урахуванням настання цієї події, умовні ймовірності гіпотез обчислюють за **формулами Байєса**:

$$P\left(H_i \mid A \right) = \frac{P(H_i) P\left(A \mid H_i \right)}{P(A)}, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \qquad (2.2)$$

Приклад 1. Імовірність поразки команди групи технологів у матчі з командою групи репрографів при дощовій погоді становить 0,5, а при відсутності дощу – 0,6. Імовірність дощу в день матчу становить 0,2. 1) Знайти ймовірність уникнення поразки командою групи технологів. 2) Команда групи технологів зазнала поразки. Яка ймовірність того, що матч відбувався при дощовій погоді?

Розв'язування. 1) Нехай подія A – поразка команди групи технологів. Утворимо дві гіпотези: H_1 – під час матчу дощова погода; H_2 – під час матчу не буде дощу. За умовою задачі

$$P(H_1)=0,2; \quad P(H_2)=0,8; \quad P\left(A|H_1\right)=0,5; \quad P\left(A|H_2\right)=0,6.$$

За формулою повної ймовірності (2.1)

$$P(A)=P(H_1)\cdot P\left(A|H_1\right)+P(H_2)\cdot P\left(A|H_2\right)$$

знаходимо ймовірність поразки команди групи технологів:

$$P(A)=0,2\cdot 0,5+0,8\cdot 0,6=0,58.$$

Тоді ймовірність уникнення поразки становить:

$$P(\overline{A})=1-P(A)=1-0,58=0,42.$$

Зауваження. Обчислення ймовірності за формулою (2.1) можна виконати за допомогою вбудованої математичної функції **СУММПРОИЗВ** (Массив1, Масив 2, Масив 3) (рис. 2.1),

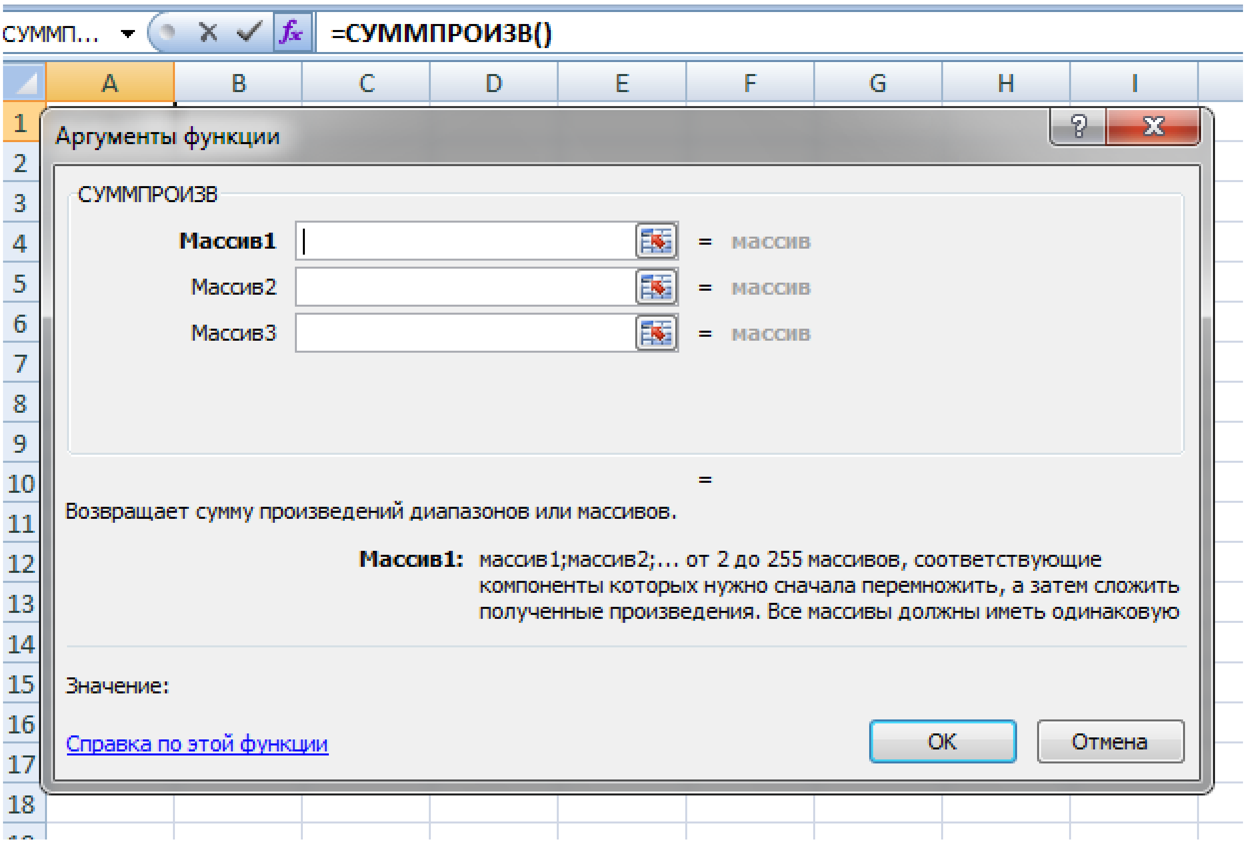
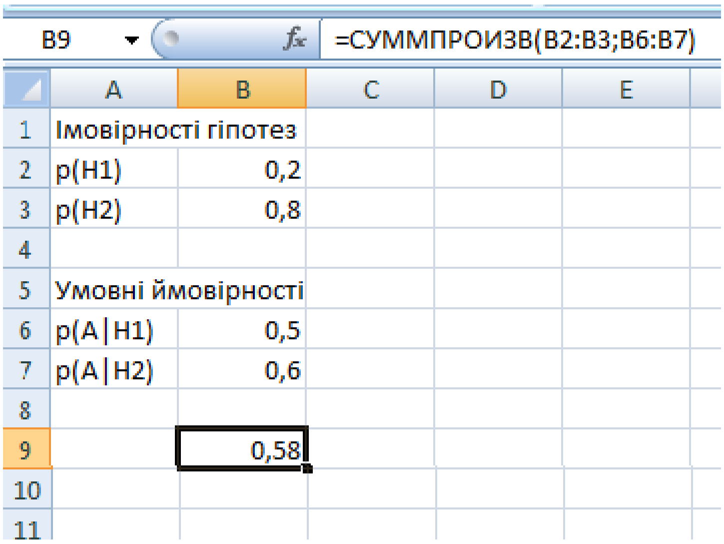


Рис. 2.1. Вигляд функції на екрані.

задаючи для даної задачі тільки 2 масиви даних, один з них є ймовірностями прийнятих гіпотез, а другий – відповідними умовними ймовірностями (рис. 2.2).



B9 =СУММПРОИЗВ(B2:B3;B6:B7)

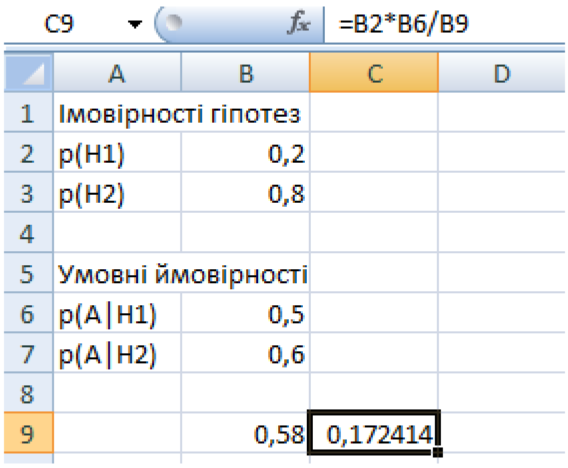
	A	B	C	D	E
1	Імовірності гіпотез				
2	p(H1)	0,2			
3	p(H2)	0,8			
4					
5	Умовні ймовірності				
6	p(A|H1)	0,5			
7	p(A|H2)	0,6			
8					
9		0,58			
10					
11					

Рис. 2.2. Обчислення за формулою повної ймовірності.

2) За формулою Байєса знаходимо ймовірність того, що йшов дощ під час матчу, в якому команда групи технологів зазнала поразки:

$$P\left(H_1 \mid A\right) = \frac{P(H_1) \cdot P\left(A \mid H_1\right)}{P(A)} = \frac{0{,}2 \cdot 0{,}5}{0{,}58} = 0{,}17 .$$

Обчислення за допомогою описаної функції в Excel подано на рис. 2.3.



C9 =B2*B6/B9

	A	B	C	D
1	Імовірності гіпотез			
2	p(H1)	0,2		
3	p(H2)	0,8		
4				
5	Умовні ймовірності			
6	p(A|H1)	0,5		
7	p(A|H2)	0,6		
8				
9		0,58	0,172414	

Рис. 2.3. Обчислення за формулою Байєса.

Відповідь. 1) 0,58; 2) 0,17.

2.2.2. Формула Бернуллі, граничні теореми формули Бернуллі

Імовірність $P_n(k)$ того, що подія *A* настане *k* разів в серії незалежних *n* випробувань $(0 \le k \le n)$ обчислюють за ***формулою Бернуллі***:

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}.$$

Якщо проводяться випробування за схемою Бернуллі та числа n і k великі, то обчислення ймовірності за формулою Бернуллі викликає певні труднощі. У таких випадках для обчислення цих імовірностей застосовують асимптотичні (наближені) формули, які випливають із ***локальної та інтегральної теорем Муавра-Лапласа*** та ***граничної тереми Пуассона.*** Назва «гранична» в обох випадках пов'язана з тим, що ці теореми встановлюють поведінку ймовірності $P_n(k)$ або $P_n(k_1 \le k \le k_2)$ за певних умов, до яких обов'язково входить умова $n \to \infty$.

З огляду на це, за досить великих значень *n* та за малих p замість формули Бернуллі часто використовують наближені асимптотичні формули.

Формула Пуассона

Теорема (теорема Пуассона). *Якщо* $n \to \infty$ *і* $p \to 0$ *так, що* $np \to \lambda, 0 < \lambda < \infty$*, то*

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k} \to \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \qquad (2.3)$$

для будь-якого сталого $k = 0, 1, 2, \ldots$.

Наслідок. Ймовірність настання події *A* k разів в *n* випробуваннях схеми Бернуллі знаходять за наближеною *формулою Пуассона*

$$P_n(k) \approx \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \qquad (2.4)$$

де $\lambda = np$.

Ця формула дає досить точне наближення за значень *p*, близьких до нуля $(p < 0{,}1)$, тобто для подій, що рідко трапляються і для достатньо великих *n* $(npq \le 9)$.

Теорема (локальна теорема Муавра-Лапласа). *Якщо ймовірність* p *настання події* A *в кожній спробі стала і така, що* $0 < p < 1$, *то ймовірність числа* k *настання події в* n *спробах обчислюється за наближеною рівністю*

$$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi\left(\frac{k-np}{\sqrt{npq}}\right), \text{ де } \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}. \qquad (2.5)$$

Формула (2.5) дає добре наближення, якщо *n* достатньо велике, *p* та q не дуже близькі до нуля, $npq > 9$.

Теорема (інтегральна теорема Муавра-Лапласа). *Ймовірність того, що в n незалежних випробуваннях схеми Бернуллі, в яких подія A може відбутись з ймовірністю p, подія A відбудеться не менше* k_1 *та не більше* k_2 *разів, наближено рівна*

$$P_n(k_1 \le k \le k_2) \approx \Phi\left(\frac{k_2-np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{k_1-np}{\sqrt{npq}}\right), \quad \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt. \quad (2.6)$$

Формула (2.6) дає добре наближення, якщо *n* достатньо велике, *p* та q не дуже близькі до нуля, $npq > 9$. Для всіх значень $x \ge 5$ можна вважати $\Phi(x) \approx 0{,}5$.

Користуючись формулою Бернуллі, її граничними теоремами та програмою Excel розв'язати наступні задачі:

Приклад 2. Імовірність влучити в мішень при одному пострілі дорівнює 0,8. Знайти найімовірнішу кількість влучень із 6 пострілів та відповідну ймовірність.

Розв'язування. Знайдемо величину виразу $np + p = 0{,}8 \cdot 6 + 0{,}8 = 5{,}6 -$ не ціле число. Тоді найбільше ціле число, яке не перевищує 5,6, дорівнює 5. Таким чином, найбільш імовірне ціле число влучень $k_0 = 5$. Імовірність п'яти влучень із шести пострілів обчислюємо за формулою Бернуллі

$$P_6(5) = C_6^5 \cdot 0{,}8^5 \cdot 0{,}2 = 0{,}39.$$

Використаємо функцією Excel категорії «Статистические» **БИНОМРАСП** (*число_успехов; число_испытаний; вероятность_успеха; интегральная*) : *число_успехов* = 5; *число_испытаний* = 6; *вероятность_успеха* = 0,8; *интегральная* −0.

Відповідь. $k_0 = 5$, $P_6(5) = 0{,}39$.

Приклад 3. Імовірність влучити в мішень при одному пострілі дорівнює 0,8. Знайти ймовірність того, що із 100 пострілів кількість влучень буде: а) точно 90; б) лежить у межах від 75 до 85.

Розв'язування. Згідно з умовою задачі $np = 80 > 5$ і $nq = 20 > 5$, тому можна скористатися формулами Муавра-Лапласа.

а) За локальною формулою Муавра-Лапласа (2.5) знаходимо:

$$x = \frac{90 - 0{,}8 \cdot 100}{\sqrt{100 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2}} = \frac{10}{4} = 2{,}5.$$

Для $x = 2{,}5$ знаходимо (за таблицею значень $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$) $\varphi(x) = 0{,}0175$ та, відповідно, $P_{100}(90) = \frac{0{,}0175}{4} = 0{,}004$.

Знаючи функцію Excel категорії «Статистические» **БИНОМРАСП** (*число_успехов; число_испытаний; вероятность_успеха; интегральная*), обчислення проводять набагато швидше (рис. 2.4).

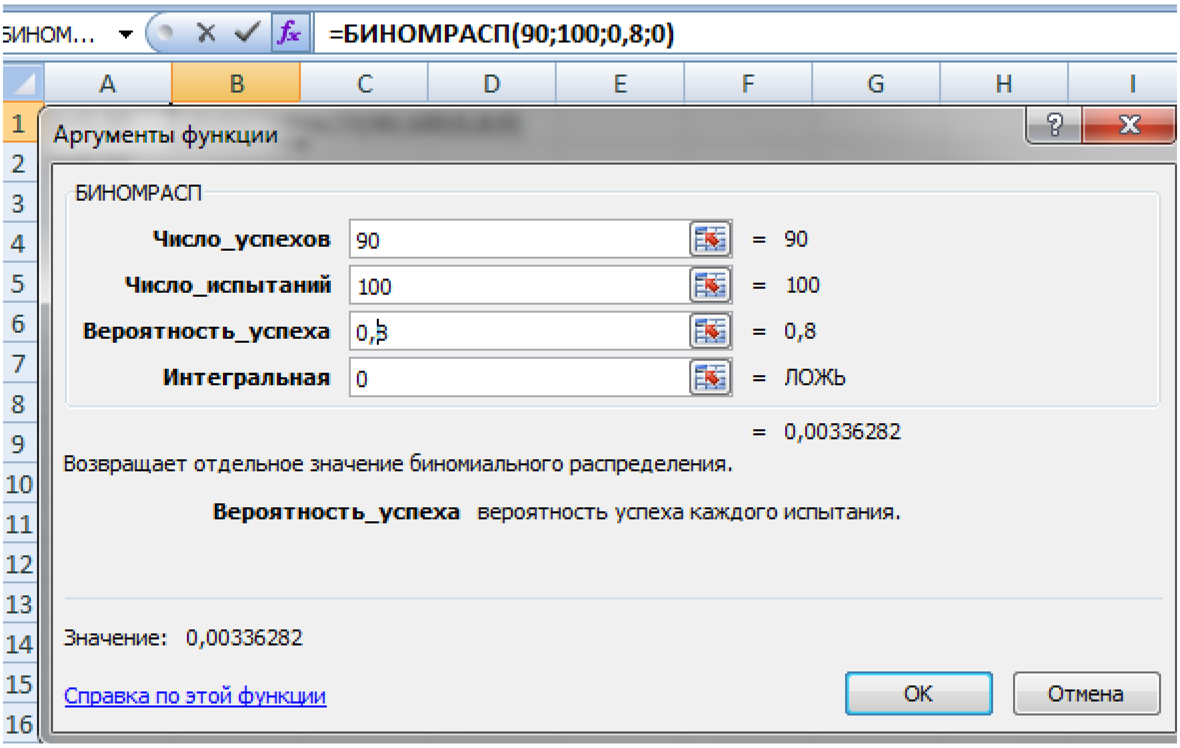


Рис. 2.4. Обчислення за локальною формулою Муавра-Лапласа.

б) За інтегральною формулою Муавра-Лапласа (2.6) знаходимо:

$$x_1 = \frac{75-80}{4} = -1{,}25; \quad x_2 = \frac{85-80}{4} = 1{,}25.$$

Для $x = 1{,}25$ знаходимо за таблицею значень функції Лапласа $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$:

$$\Phi(1{,}25) = 0{,}39435.$$

Тоді $\Phi(-1{,}25) = -0{,}39435$. Шукану ймовірність знаходимо як різницю

$$P_{100}(75 < k < 85) = \Phi(1{,}25) - \Phi(-1{,}25) = 0{,}39435 - (-0{,}39435) = 0{,}79.$$

Зауваження. Можна також провести обчислення із використанням тієї ж функції Excel категорії «Статистические» **БИНОМРАСП** (*число_успехов; число_испытаний; вероятность_успеха; интегральная*), де для пункту а) брали *интегральная* – 0, але для пункту б) слід взяти значення *интегральная* – 1 (повертає значення: кількість успішних випробувань не менше значення аргументу *число_испытаний*, тобто обчислюють два значення функції для $k = 75$, $k = 85$ та знаходять їх різницю (рис. 2.5).

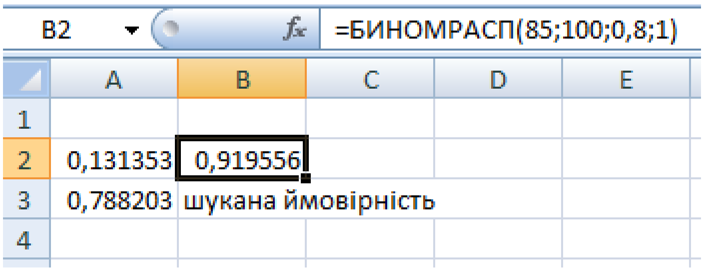


Рис.2.5. Обчислення для інтегральної формули Муавра-Лапласа.

Відповідь. а) 0,004; б) 0,79.

Приклад 3. Словник має 1500 сторінок. Імовірність друкарської помилки на одній сторінці дорівнює 0,001. Знайти ймовірність того, що в словнику:

а) буде точно 3 помилки;

б) не буде жодної помилки;

в) буде хоча б одна помилка.

Розв'язування. а) За умовою ймовірність друкарської помилки на одній сторінці $p = 0{,}001 < 0{,}01$, тоді добуток

$$npq = 1500 \cdot 0{,}001 \cdot 0{,}999 = 1{,}49 < 5 \; (np = 1500 \cdot 0{,}001 = 1{,}5 < 20).$$

За формулою Пуассона (2.3) та за таблицею значень $p_k = \dfrac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$ обчислюємо $P_{1500}(3) = \dfrac{1{,}5^3}{3!} \cdot e^{-1{,}5} \approx 0{,}125$.

Скористаємось функцією Excel категорії «Статистические» **ПУАССОН** (x; *среднее; интегральная)*; для таких параметрів: $x-$ кількість сприятливих подій; *среднее* − середнє значення $\lambda = n \cdot p$; *интегральная* − 0 або 1. В умові задачі $x = 3$; *среднее* $\lambda = 1{,}5$; *интегральная* – 0, тобто обчислення точної кількості подій – 3 помилки для словника із 1500 сторінками (рис. 2.6).

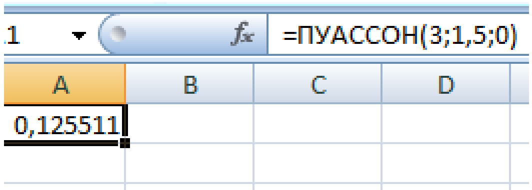


Рис. 2.6. Обчислення за допомогою функції **ПУАССОН.**

б) Імовірність того, що в словнику не буде жодної помилки, тобто $k = 0$, обчислюємо за тією ж формулою Пуассона

$$P_{1500}(0) = \frac{1{,}5^0}{0!} \cdot e^{-1{,}5} = \frac{1}{1 \cdot \sqrt{e^3}} \approx \frac{1}{4{,}48} \approx 0{,}223.$$

в) Подія A – у словнику буде хоча б одна помилка, є протилежною до події – у словнику немає жодної помилки. Тому

$$P(A) = 1 - P_{1500}(0) = 1 - 0{,}223 = 0{,}777.$$

Зауваження. Якщо аргумент *«интегральная»* набуває значення 1 («істина»), тоді функція **ПУАССОН** повертає ймовірність того, що кількість випадкових подій була в діапазоні від 0 до x включно.

Відповідь. а) 0,125; б) 0,223; в) 0,777.

Розділ III

Елементи математичної статистики

3.1. Вибірка, її характеристики. Точкові оцінки числових характеристик випадкових величин. Побудова гістограми та функції розподілу

Дані у статистиці, отримані за допомогою спеціальних досліджень або із звичайних робочих записів у бізнесі, надходять до дослідника у вигляді неорганізованої маси, незалежно від того, чи є вони даними із вибіркової сукупності, чи даними з генеральної сукупності. Тому постає питання обробки і впорядкування даних.

Значення x_i вибірки називають *варіантами*. Послідовність варіант, розміщених в порядку зростання, називають *варіаційним рядом*. Якщо при цьому x_i повторюється n_i разів ($i=1, 2, \dots, k, n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$), то число n_i називають *абсолютною частотою* варіанти x_i, а n_i/n – *відносною частотою* варіанти x_i.

Статистичним розподілом вибірки називають перелік варіант та відповідних частот або відносних частот. Статистичний закон розподілу зручно задавати таблицею, що встановлює зв′язок між значеннями випадкової величини та їх частотами:

x_i	x_1	x_2	$\dots$	x_k
n_i	n_1	n_2	$\dots$	n_k

Означення. *Емпірична функція розподілу* має такий вигляд

$$F_n^*(x) = \begin{cases} 0, & x < x_1; \\ \sum\limits_{k=1}^{n} n_k/n, & x_k \le x < x_{k+1} \ (k = 1, 2, \dots, n-1); \\ 1, & x \ge x_n. \end{cases} \quad (3.1)$$

Означення. *Полігоном частот* вибірки називають ламану з вершинами в точках $(x_i, n_i), (i = 1, 2, \ldots, k)$. *Полігоном відносних частот* вибірки називають ламану з вершинами в точках $\left(x_i, {}^{n_i}\!/_{n} \right), (i = 1, 2, \ldots, k)$.

Якщо X – неперервна випадкова величина, то її статистичний розподіл також подають у вигляді таблиць. Для оцінки $f(x)$ за вибіркою $x_1, x_2, \cdots, x_n$ розбивають інтервал на частинні інтервали довжини h, в таблицю записують середину *i*-того інтервалу, n_i– кількість елементів вибірки *i*-того інтервалу. Прямокутники з основами h і висотами $\frac{n_i}{nh}$ у прямокутній системі координат утворюють фігуру, яку називають *гістограмою* вибірки.

Незміщеною сильно слушною оцінкою математичного сподівання випадкової величини X є *вибіркове середнє* $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ і реалізацію цієї оцінки позначають

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i . \qquad (3.2)$$

Вибіркове середнє для *дискретного статистичного ряду* обчислюють за формулою

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i x_i, \text{ де } \sum_{i=1}^{k} n_i = n.$$

Вибіркове середнє для *інтервального статистичного ряду* обчислюють за формулою

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i z_i, \text{ де } z_i - \text{середина } i - \text{того інтервалу, } \sum_{i=1}^{k} n_i = n.$$

Оцінкою дисперсії σ^2 випадкової величини X є *вибіркова дисперсія*

$$\overline{s}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2, \qquad (3.3)$$

яка є *зміщеною* оцінкою для σ^2.

Величина

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2,\ s^2 = \frac{n}{n-1}\bar{s}^2 \qquad (3.4)$$

є *незміщеною* оцінкою дисперсії σ^2 випадкової величини X .

Якщо математичне сподівання a відоме, то *незміщеною сильно слушною оцінкою дисперсії* σ^2 випадкової величини X є оцінка

$$s^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - a\right)^2.$$

Вибіркову дисперсію для *дискретного статистичного ряду* обчислюють за формулою

$$\bar{s}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}\left(n_i x_i - \bar{x}\right)^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i x_i^{\ 2} - \bar{x}^2, \qquad (3.5)$$

відповідно

$$s^2 = \frac{n}{n-1}\bar{s}^2;\ s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{k}\left(n_i x_i - \bar{x}\right)^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{k} n_i x_i^{\ 2} - \bar{x}^2. \qquad (3.6)$$

Вибіркову дисперсію для *інтервального статистичного ряду* обчислюють за формулою

$$\bar{s}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}\left(n_i z_i - \bar{x}\right)^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i z_i^{\ 2} - \bar{x}^2, \qquad (3.5')$$

відповідно,

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{k}\left(n_i z_i - \bar{x}\right)^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{k} n_i z_i^{\ 2} - \bar{x}^2. \qquad (3.6')$$

Величина $\bar{s} = \sqrt{\bar{s}^2}$ називається *вибірковим середнім квадратичним відхиленням*, $s = \sqrt{s^2}$ – *вибірковим виправленим середнім квадратичним відхиленням* (s^2 – вибіркова виправлена дисперсія).

Означення. *Медіаною* M_e називають варіанту, яка ділить варіаційний ряд на дві частини, рівні за кількістю варіант.

Для *дискретних статистичних рядів*

$$M_e = \begin{cases} x_m, & n = 2m-1 \\ \dfrac{x_m + x_{m+1}}{2}, & \text{при } n = 2m. \end{cases} \qquad (3.7)$$

Для *інтервальних статистичних рядів*

$$M_e = x_i + h_i \frac{\frac{n}{2} - \sum_{j=1}^{i} n_j}{n_i}, \qquad (3.7')$$

де x_i – початок медіанного інтервалу (йому відповідає перша з нагромаджених частот, що перевищує половину всіх спостережень), h_i – довжина i-го інтервалу, n_i – частота медіанного інтервалу.

Означення. *Модою* називають варіанту, яка найчастіше трапляється у вибірці.

Для *дискретних статистичних рядів*

$$M_0 = x_j, \text{ якщо } n_j = \max_i n_i. \qquad (3.8)$$

Для *інтервальних статистичних рядів*

$$M_0 = x_i + h \frac{n_i - n_{i-1}}{2n_i - n_{i-1} - n_{i+1}}, \qquad (3.8')$$

де x_i – початок інтервалу із найбільшою частотою, n_i – частота i-го інтервалу.

Означення. *Початковим емпіричним моментом порядку* k називається вираз

$$M_k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i^k, \qquad (3.9)$$

зокрема $M_1 = \bar{x}$.

Означення. *Центральним емпіричним моментом порядку* k називається вираз

$$m_k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^k, \qquad (3.10)$$

зокрема, $m_2 = \bar{s}^2$.

Означення. *Коефіцієнтом асиметрії* A_S називається відношення центрального емпіричного моменту третього порядку до куба середнього квадратичного відхилення:

$$A_s = \frac{m_3}{\sigma^3} = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^3}{s^3}. \quad (3.11)$$

Означення. *Ексцесом E* називається зменшене на три одиниці відношення центрального моменту четвертого порядку до четвертого степеня середнього квадратичного відхилення:

$$E = \frac{m_4}{\sigma^4} - 3. \quad (3.12)$$

Визначення числових характеристик із використанням табличного процесору Microsoft Excel

Більшість числових характеристик у випадку незгрупованих даних можна обчислити з використанням табличного процесору Microsoft Excel. Основні вбудовані функції Excel, що застосовуються для таких розрахунків, надано у таблиці 3.1. Щоб викликати потрібну функцію, слід обрати категорію *Статистические* та ім’я функції.

Крім того, часто корисні такі функції:

− **НАИБОЛЬШИЙ** (массив, *k*) – надає *k*-е найбільше значення в ряді даних;

− **НАИМЕНЬШИЙ** (массив, *k*) – надає *k*-е найменше значення в ряді даних.

Таблиця 3.1

Статистичні функції Excel

Числові характеристики	Назва функції
Середнє	**СРЗНАЧ** (число1, число 2, …)
Середнє геометричне	**СРГЕОМ** (число1, число 2, …)
Мода	**МОДА** (число1, число 2, …)
Медіана	**МЕДИАНА** (число1, число 2, …)
Дисперсія	**ДИСП** (число1, число 2, …) **ДИСПР** (число1, число 2, …)
Середнє квадратичне відхилення	**СТАНДОТКЛОН** (число1, число 2, …)
Мінімальне значення	**МИН** (число1, число 2, …))
Максимальне значення	**МАКС** (число1, число 2, …)
Частота	**ЧАСТОТА** (массив_данных; массив_ интервалов)

Побудова гістограми засобами Microsoft Excel

Excel надає два способи побудови гістограми.

Для побудови гістограми *першим способом* необхідно:

1) Внести в лист Excel вхідні дані та інтервали, за якими ці дані будуть групуватися.

2) Знайти частоти потрапляння даних в інтервали за допомогою функції **ЧАСТОТА**, для чого:

− виділити діапазон комірок (на одну більше, ніж інтервалів), в яких будуть записані частоти;

− викликати f_x – *Статистические* – **ЧАСТОТА**;

− ввести посилання на комірки, що містять вхідні дані і інтервали;

− натиснути Ctrl+Shift+Enter.

3) Викликати *Вставка — Гистограмма*, з’явиться діалогове вікно (див. рис. 3.1).

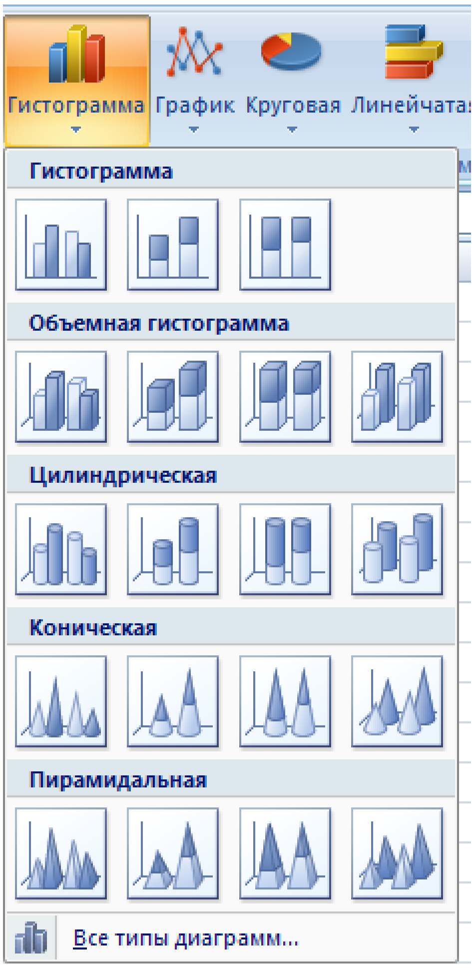


Рис. 3.1. Діалогове вікно майстра гістограм.

4) Надати необхідні для побудови гістограми параметри:

− діапазон вхідних даних, спосіб їх групування (за рядками або стовпчиками) та імена рядів даних, якщо це потрібно;

− якщо імена рядів надано, відмітити *Добавить легенду* і вказати її розміщення;

− якщо потрібно, добавити *Имена рядов*, або (та) *Имена категорий*, або (та) *Значения*;

− якщо потрібно, добавити *Заголовок*, *Линии сетки*, *Оси*, *Таблицу данных*.

Для побудови гістограми *другим способом* необхідно:

1) Внести в лист Excel вихідні дані.

2) Обрати в меню *Сервис – Анализ данных – Гистограмма*, з'явиться діалогове вікно (див. рис. 3.2).

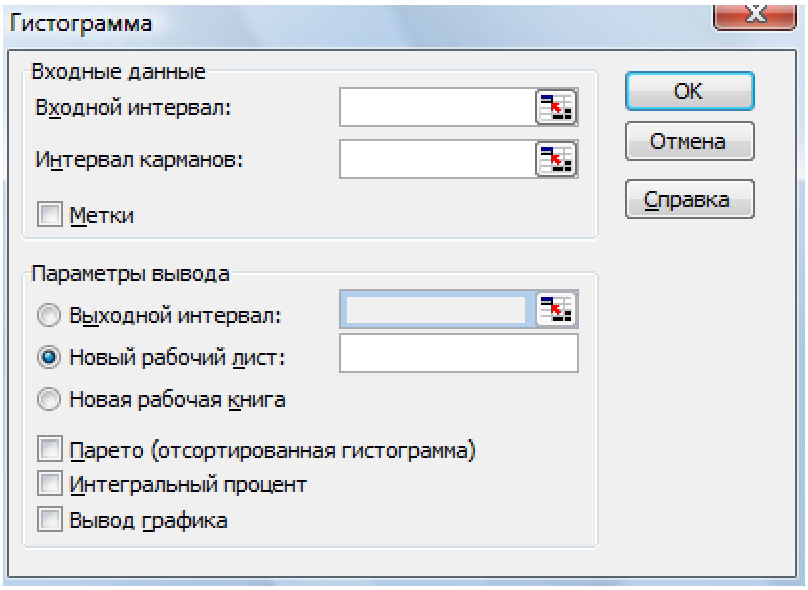


Рис. 3.2. Діалогове вікно для побудови гістограми.

3) Задати необхідні для побудови гістограми параметри:

входной диапазон – задати посилання на комірки, в яких знаходяться вхідні дані;

интервал карманов (параметр не є обов'язковим) – задати діапазон комірок і набір граничних значень у порядку зростання; якщо параметр не введений, то буде автоматично створений набір відрізків, рівномірно розподілених між мінімальним і максимальним значеннями даних;

выходной диапазон – ввести посилання на верхню ліву комірку діапазону, в який буде надано гістограму, або відмітити параметр *Новый рабочий лист* або *Новая рабочая книга*;

интегральный процент – якщо цей параметр відмічено, то будуть розраховані накопичені частоти і побудований їх графік;

вывод графика – якщо цей параметр відмічено, то буде створено автоматично діаграму, при цьому обов'язково задається значення *Новая книга*.

Приклад 1. Дана вибірка X=1, 0, –1, 0, 1, 0. Знайти точкову оцінку математичного сподівання, а також зміщену і незміщену оцінки дисперсії та середньоквадратичного відхилення.

Розв'язування. Зведемо вихідні дані до дисперсійної таблиці та виконаємо відповідні обчислення (табл. 3.2).

Таблиця 3.2. Дисперсійна таблиця до прикладу 1

N	x_i	x_i^2
1	1	1
2	0	0
3	–1	1
4	0	0
5	1	1
6	0	0
Σ	1	3

За даними, одержаними з табл. 3.2, розрахуємо:

– математичне сподівання $\bar{x}$:

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{1}{6}\cdot 1 = \frac{1}{6};$$

– зміщену та незміщену оцінки дисперсії

$$\overline{\sigma_x^2} = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) - \frac{1}{n^2}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 = \frac{1}{6}\cdot 3 - \frac{1}{6^2}\cdot 1^2 = \frac{17}{36};$$

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \frac{1}{n(n-1)}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 = \frac{1}{5}\cdot 3 - \frac{1}{6\cdot 5}\cdot 1^2 = \frac{17}{30};$$

– зміщену та незміщену оцінки середньоквадратичного відхилення

$$\overline{\sigma_x} = \sqrt{\sigma_x^2} = \sqrt{\frac{17}{36}} = \frac{\sqrt{17}}{6};$$

$$\sigma_x = \sqrt{\sigma_x^2} = \sqrt{\frac{17}{30}}.$$

Приклад 2. За даними вибіркового дослідження відома заробітна платня (у грн.) 20-и службовців однієї із компаній (табл. 3.3). Знайти за допомогою вбудованих статистичних функцій Excel всі можливі числові характеристики за даними таблиці.

Таблиця 3.3

3560	2190	2390	3400
2180	2400	3350	2340
2900	2570	3300	3150
3680	3250	2250	3240
2180	2600	2870	3050

Розв'язування. Запишемо в лист Excel вхідні дані і числові характеристики, які можна знайти (рис. 3.3). Для знаходження характеристик введемо:

1) середнє значення (математичне сподівання) − формула **СРЗНАЧ** (A2:D6);

2) медіана − формула **МЕДИАНА** (A2:D6);

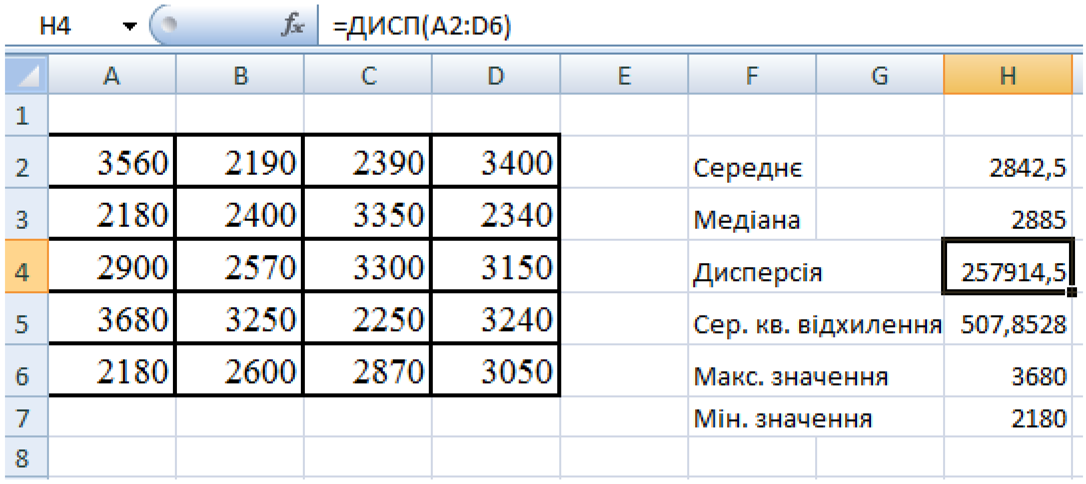
3) дисперсія (незміщена оцінка) − формула **ДИСП** (A2:D6);

4) середнє квадратичне відхилення (незміщена оцінка) − формула **СТАНДОТКЛОН** (A2:D6); також можна ввести **КОРЕНЬ** (H4), тобто обчислення за означенням (за коміркою дисперсії);

5) максимальне значення − формула **МАКС** (A2:D6);

6) мінімальне значення − формула **МИН** (A2:D6).

Зауваження. Функція **ДИСП** оцінює дисперсію за вибіркою, тобто вважається, що аргументи є вибіркою із генеральної сукупності. Якщо дані представляють всю генеральну сукупність, то слід використовувати функцію **ДИСПР.**



H4 =ДИСП(A2:D6)

	A	B	C	D	E	F	G	H
1								
2	3560	2190	2390	3400		Середнє		2842,5
3	2180	2400	3350	2340		Медіана		2885
4	2900	2570	3300	3150		Дисперсія		257914,5
5	3680	3250	2250	3240		Сер. кв. відхилення		507,8528
6	2180	2600	2870	3050		Макс. значення		3680
7						Мін. значення		2180
8								

Рис. 3.3. Розрахунок числових характеристик.

***Приклад* 3.** За даними вибіркового дослідження відома кількість родин з дітьми дошкільного віку в селах деякої області (табл. 3.4). Побудувати за допомогою Excel гістограму за даними таблиці.

Таблиця 3.4

27	36	34	46	43	28	29	37	40	43
40	33	50	37	41	32	27	43	34	32
30	41	54	42	47	35	49	49	54	36
36	51	36	24	35	25	33	38	38	36
29	51	32	36	53	30	55	44	46	38
29	44	48	30	34	46	47	36	37	36
30	58	42	46	46	29	38	44	40	30
35	35	63	47	37	29	53	41	42	41

Розв'язування. Запишемо в лист Excel вхідні дані завдання (рис. 3.4). Розрахуємо частоти потрапляння в інтервали (див. зміст командного рядка на рис. 3.4).

E11 | f_x | {=ЧАСТОТА(B2:K9;B11:B21)}

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1											
2		27	36	34	46	43	28	29	37	40	43
3		40	33	50	37	41	32	27	43	34	32
4		30	41	54	42	47	35	49	49	54	36
5		36	51	36	24	35	25	33	38	38	36
6		29	51	32	36	53	30	55	44	46	38
7		29	44	48	30	34	46	47	36	37	36
8		30	58	42	46	46	29	38	44	40	30
9		35	35	63	47	37	29	53	41	42	41
10											
11		24		частоти	1						
12		28			4						
13		32			13						
14		36			17						
15		40			11						
16		44			13						
17		48			9						
18		52			5						
19		56			5						
20		60			1						
21		64			1						
22					0						

Рис. 3.4. Вхідні дані для побудови гістограми.

Викличемо *Вставка – Гистограмма*, задамо діапазон даних.

Для зручності читання діаграми добавимо *Заголовок* та *Значения*.

Приберемо відмітку *Легенда*, оскільки імена рядів не було надано – розглядається тільки один тип даних.

Після побудови діаграми можна у разі необхідності змінити шрифти, ширину стовпчиків гістограми, їх колір та фон. Для внесення змін потрібно двічі натиснути правою кнопкою миші на відповідне поле гістограми.

Зауважимо, що на горизонтальній осі надаються не границі інтервалів, а їх порядковий номер.

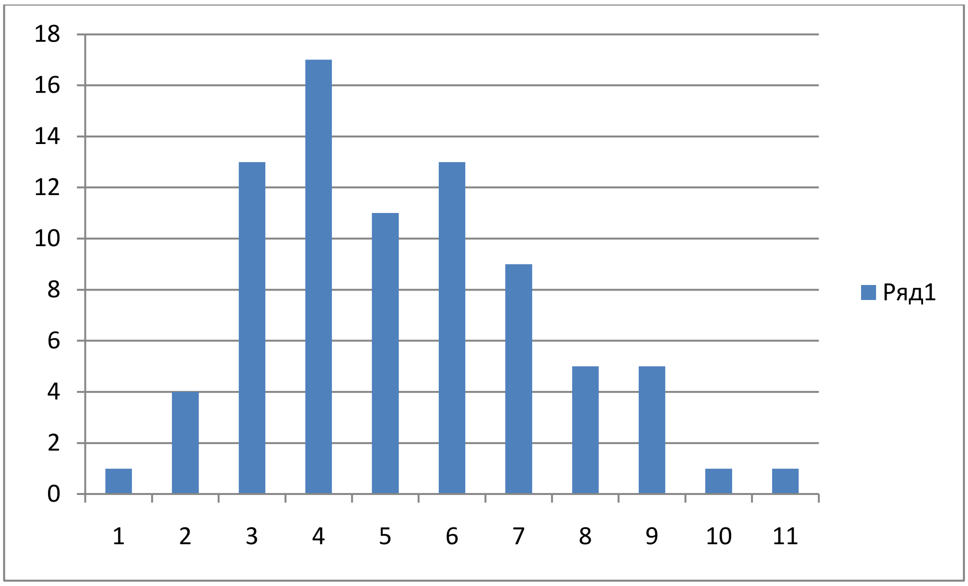


Рис. 3.5. Лист Excel із гістограмою.

Приклад 4. Обчислити вибіркове середнє та дисперсію, медіану та моду для вибірки

інтервал	$[2,4)$	$[4,6)$	$[6,8)$	$[8,10)$	$[10,12)$
n_i	2	8	35	40	15

та побудувати емпіричну функцію розподілу.

Розв'язування. Обсяг вибірки $n = 2+8+35+40+15 = 100$. Тоді

z_i	3	5	7	9	11
n_i	2	8	35	40	15

Обчислюємо числові характеристики:

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i z_i = \frac{1}{100}(2\cdot 3 + 8\cdot 5 + 35\cdot 7 + 40\cdot 9 + 15\cdot 11) = 8{,}16;$$

$$\bar{s}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i z_i^2 - \bar{x}^2 = \frac{1}{100}(2\cdot 9 + 8\cdot 25 + 35\cdot 49 + 40\cdot 81 + 15\cdot 121) - 8{,}16^2 =$$

$$= 69{,}88 - 66{,}5856 = 3{,}2944;$$

$$s^2 = \frac{n}{n-1}\bar{s}^2 = \frac{100}{99}\cdot 3{,}29 = 3{,}33;$$

$$M_e = 8 + 2\frac{50-45}{40} = 8{,}25; \quad M_0 = 8 + 2\frac{40-35}{80-35-15} = 8{,}33.$$

При побудові емпіричної функції розподілу (кумулятри) для інтервального статистичного розподілу вибірки за основу береться припущення, що ознака на кожному частинному інтервалі має рівномірну щільність імовірностей. Тому кумулята матиме вигляд ламаної лінії, яка зростає на кожному частковому інтервалі та наближається до 1. Отже, емпірична функція розподілу

$$F^*(x) = \begin{cases} 0, \ x \le 2, \\ 0{,}02, \ 2 < x \le 4, \\ 0{,}1, \ 4 < x \le 6, \\ 0{,}45, \ 6 < x \le 8, \\ 0{,}85, \ 8 < x \le 10, \\ 1, 10 < x \le 12. \end{cases}$$

Графік кумуляти показано на рис. 3.6.

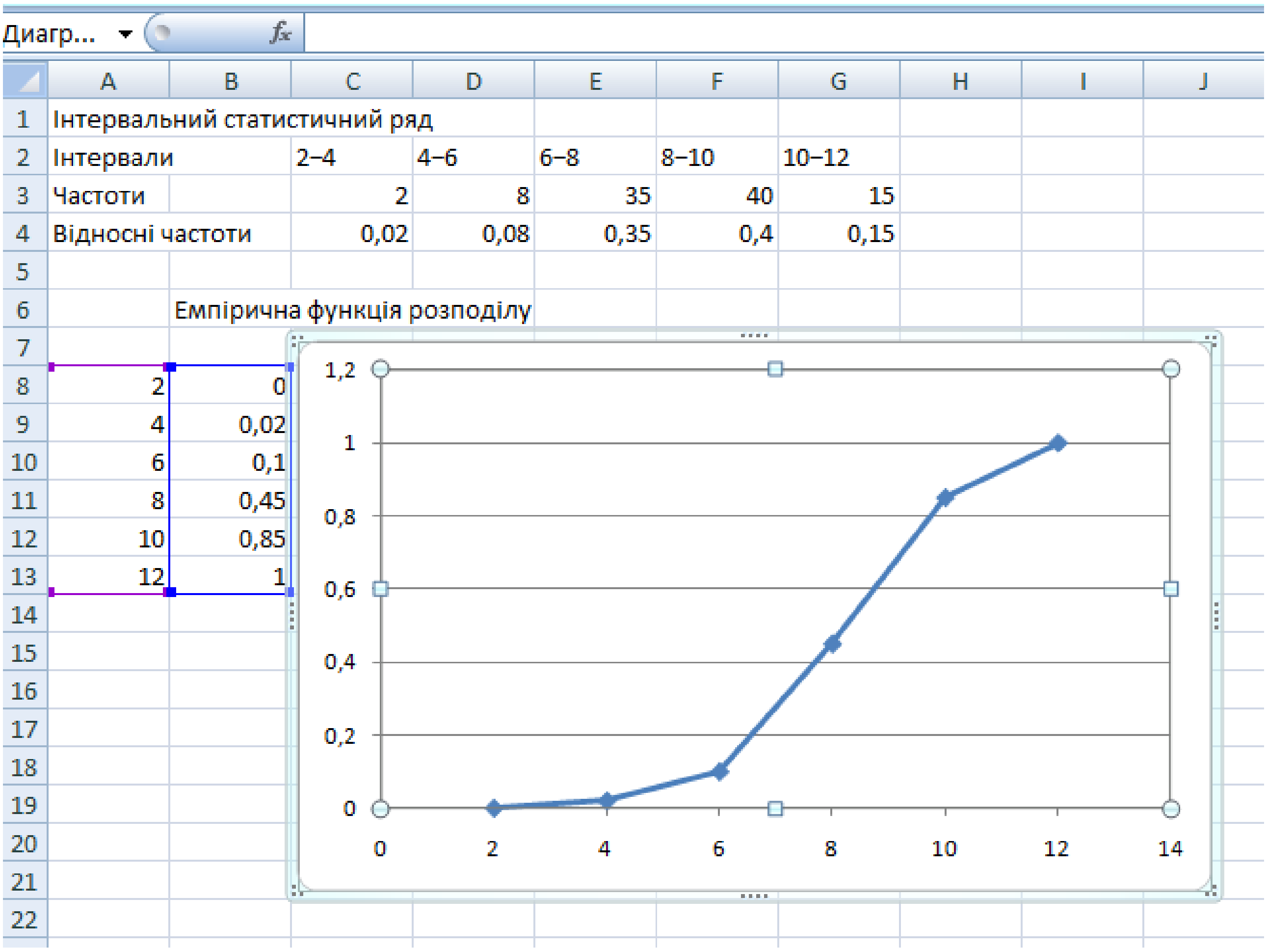


Рис. 3.6. Вигляд емпіричної функції розподілу.

Зауваження. З рисунка також визначається модальний інтервал (інтервал, що має найбільшу частоту появи), який дорівнює 8−10. Цей інтервал також є і медіанним, оскільки $F^*(8) < 0,5$, але $F^*(10) > 0,5$, то, беручи до уваги неперервність досліджуваної ознаки та властивість функції $F^*(x)$, яка є неспадною функцією, всередині інтервалу існує таке значення $X = M_e$, для якого $F^*(M_e) = 0,5$.

Відповідь. $\bar{x} = 8{,}16;\ s^2 = 3{,}33;\ M_e = 8{,}25;\ M_0 = 8{,}33.$

Рекомендовані завдання для ДКР (або опрацювання своїх зібраних експериментальних даних)

Завдання 1.

Відомі дані про безаварійну роботу автоматизованого поліграфічного комплексу (в місяцях) (табл. 3.5). Побудувати статистичний ряд за даними вибірки, визначити середній час безаварійної роботи, дисперсію і середнє квадратичне відхилення часу. Побудувати полігон частот і гістограму.

Таблиця 3.5

0,000	0,000	0,002	0,006	0,023	0,084	0,382	0,810	0,003	0,864
1,033	0,912	0,093	0,324	0,194	0,522	2,336	0,057	0,654	0,250
0,877	0,276	0,037	0,537	0,183	1,306	0,752	0,198	1,623	0,875
0,185	0,274	0,613	0,356	0,645	0,676	1,079	0,500	0,902	0,191
0,250	0,348	0,320	0,182	0,458	0,936	1,204	0,576	0,303	0,522

Завдання 2. Обчислити вибіркове середнє та дисперсію, медіану та моду для вибірки та побудувати емпіричну функцію розподілу. Всі обчислення бажано виконати за допомогою допомогою Microsoft Excel.

інтервал	$[-2, 0)$	$[0, 2)$	$[2, 4)$	$[4, 6)$	$[6, 8)$
n_i	4	6	25	40	25

3.2. Статистична перевірка гіпотези про нормальний закон розподілу

Центральна граничнa теорема – теорема теорії ймовірності про збіжність розподілу суми незалежних однаково розподілених випадкових величин до нормального розподілу. Вона і підкреслює особливість нормального розподілу.

Теорема Ляпунова. *Якщо для послідовності попарно незалежних випадкових величин* $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ *можна знайти таке число* $\delta > 0$*, що*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} M\left|X_k - M(X_k)\right|^{2+\delta}}{\left(\sqrt{\sum_{k=1}^{n} D(X_k)}\right)^{2+\delta}} = 0,$$

то

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{ \frac{\sum_{k=1}^{n} X_k - \sum_{k=1}^{n} M(X_k)}{\sqrt{\sum_{k=1}^{n} D(X_k)}} < x \right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

Зауваження. На практиці зазвичай найлегше перевірити умову Ляпунова для $\delta = 1$. Якщо послідовність випадкових величин задовольняє умову Ляпунова, то вона задовольняє також умову Лінденберга. Обернене твердження неправильне.

Теорема Лінденберга-Леві. *Якщо попарно незалежні випадкові величини* $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$*однаково розподілені і мають математичне сподівання а і дисперсію* σ^2*, то*

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{ \frac{\sum_{k=1}^{n} X_k - na}{\sigma\sqrt{n}} < x \right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

За теоремою Ляпунова вплив кожного окремого доданка на суму при великих n дуже малий, і у разі необмеженого збільшення кількості доданків закон розподілу їх суми необмежено наближається до нормального з математичним сподіванням і дисперсією, які дорівнюють сумам відповідних числових характеристик доданків.

Центральна гранична теорема пояснює поширення нормального закону розподілу і є теоретичною основою застосування нормального розподілу для багатьох практичних задач: *за широких припущень сума великої (але скінченної) кількості незалежних випадкових величин розподілена згідно із законом, близьким до нормального.* Наприклад, на відлагодженому виробництві якість продукції змінюється за нормальним законом внаслідок того, що виробнича похибка є результатом сумарної дії великого числа випадкових величин. Окремим випадком центральної граничної теореми є інтегральна формула Лапласа.

Центральна гранична теорема пояснює достатньо широке застосування нормального закону розподілу: *якщо випадкова величина формується під впливом багатьох незалежних факторів, кожен з яких здійснює на неї незначний вплив, то розподіл цієї величини близький до нормального.* Отже, важливими є вміння перевірки відповідності вибіркових даних нормальному розподілу.

Порядок дій при перевірці статистичних гіпотез

Для перевірки правильності основної статистичної гіпотези H_0 необхідно:

1) визначити гіпотезу H_1, альтернативну до гіпотези H_0;

2) обрати статистичну характеристику перевірки;

3) визначити допустиму ймовірність похибки першого роду, тобто рівень значущості α;

4) знайти за відповідною таблицею критичну область (критичну точку) для обраної статистичної характеристики.

До критичної області належать такі значення статистичної характеристики, за яких гіпотеза H_0 відхиляється на користь альтернативної гіпотези H_1.

Критерій згоди χ^2 про вигляд нормального розподілу

Критерій згоди χ^2 можна використовувати для будь-яких розподілів. Розглянемо його для перевірки гіпотези H_0: генеральна сукупність має нормальний закон розподілу $N(a, \sigma^2)$, де $a = \bar{x}, \sigma^2 = s^2$.

Розбиваємо числову вісь на r інтервалів, що не перетинаються: $h_1, h_2, \ldots, h_r; n_i -$ кількість елементів вибірки, що потрапили в інтервал $h_i \ (i = 1, 2, \ldots, r)$. Позначимо через $p_i = P(X \in h_i)$; тоді $np_i -$теоретичні частоти. За формулою обчислення ймовірності

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right) \tag{3.13}$$

для нормального розподілу одержимо при $a = \bar{x}, \sigma = s, h_i = (x_i, x_{i+1})$

$$p_i = P\left(x_i < X < x_{i+1}\right) = \Phi\left(\frac{x_{i+1} - \bar{x}}{s}\right) - \Phi\left(\frac{x_i - \bar{x}}{s}\right).$$

За критерій перевірки гіпотези H_0 беруть величину

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{r} \frac{(n_i - np_i)^2}{np_i}. \tag{3.14}$$

Кількість k ступенів вільності дорівнює $k = r - l - 1$, де $l -$ кількість параметрів розподілу, для нормального розподілу $k = r - 3$.

Якщо справедлива нульова гіпотеза за даним рівнем значущості α і кількістю ступенів вільності $k,$ за таблицею розподілу χ^2 знаходимо критичну точку $\chi^2_{k;\alpha}$ з рівності $P(\chi^2 > \chi^2_{k;\alpha}) = \alpha$. Якщо $\chi^2 < \chi^2_{k;\alpha}$, то гіпотеза H_0 приймається, якщо $\chi^2 \geq \chi^2_{k;\alpha}$, то гіпотеза H_0 відхиляється. У випадку, коли гіпотеза відхиляється, необхідно, по-перше, збільшити обсягвибірки (кількість іспитів) і провести нову перевірку, якщо й це не допоможе, то треба знайти інший вираз для закону розподілу.

Висновок. Для того, щоб при заданому рівні значущості α перевірити гіпотезу про нормальний розподіл генеральної сукупності, треба:

1. Обчислити вибіркове середнє $\bar{x}$ і вибіркове середнє квадратичне відхиленняσ.

2. Обчислити теоретичні частоти.

Якщо ознака X генеральної сукупності має неперервний розподіл імовірностей, то теоретичні частоти обчислюються за формулою

$$n_i' = np_i, \tag{3.15}$$

де n − обсяг вибірки, а p_i − імовірність того, що випадкова величина X потрапить в i-й частковий інтервал. Вона обчислюється в загальному випадку за формулами того закону розподілу, який припускаємо на основі обробки статистичного розподілу вибірки.

Якщо є підстави для припущення, що ознака генеральної сукупності X має нормальний закон розподілу, то теоретичні частоти можна обчислювати за формулами:

$$n_i' = \frac{nh}{\sigma} \cdot \varphi(u_i) = \frac{nh}{\sigma} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x_i - \overline{x}_B)^2}{2\sigma^2}}, \tag{3.16}$$

де n − обсяг вибірки; h − довжина *часткового* інтервалу; $\overline{x}_\text{В}$ − вибіркова середня величина; σ − вибіркове середнє квадратичне відхилення; $\varphi(u_i)$ − щільність імовірностей для загального нормального закону розподілу або

$$n_i' = n \cdot \left(\Phi\left(\frac{x_{i+1} - \overline{x}_\text{В}}{\sigma} \right) - \Phi\left(\frac{x_i - \overline{x}_\text{В}}{\sigma} \right) \right), \tag{3.17}$$

де $\Phi\left(\frac{x_{i+1} - \overline{x}_\text{В}}{\sigma} \right)$, $\Phi\left(\frac{x_i - \overline{x}_\text{В}}{\sigma} \right)$ − функції Лапласа.

3. Порівняти емпіричні і теоретичні частоти за допомогою критерію Пірсона. Для цього обчислити значення критерію за формулою (3.14).

4. За таблицею критичних точок розподілу χ^2 за заданим рівнем значущості α та кількістю ступенів вільності знаходять критичну точку $\chi^2_{k;\alpha}$, роблять відповідні висновки стосовно зробленої гіпотези.

Приклади перевірки статистичних гіпотез

Приклад 1. За заданим інтервальним статистичним розподілом випадкової величини X − маса новонароджених дітей (табл.3.6), Таблиця 3.6

h=0,5	1–1,5	1,5–2	2–2,5	2,5–3	3–3,5	3,5–4	4–4,5
n_i	10	20	50	35	28	15	12

при рівні значущості $\alpha = 0,01$ перевірити правильність H_0 про нормальний закон розподілу ознаки X − маси новонароджених дітей.

Розв'язування. Для визначення теоретичних частот $n_i' = np_i$ потрібно обчислити $\overline{x}_B$, σ.

Дискретний статистичний розподіл буде таким:

x_i	1,25	1,75	2,25	2,75	3,25	3,75	4,25
n_i	10	20	50	35	28	15	12

$$n = \sum n_i = 170.$$

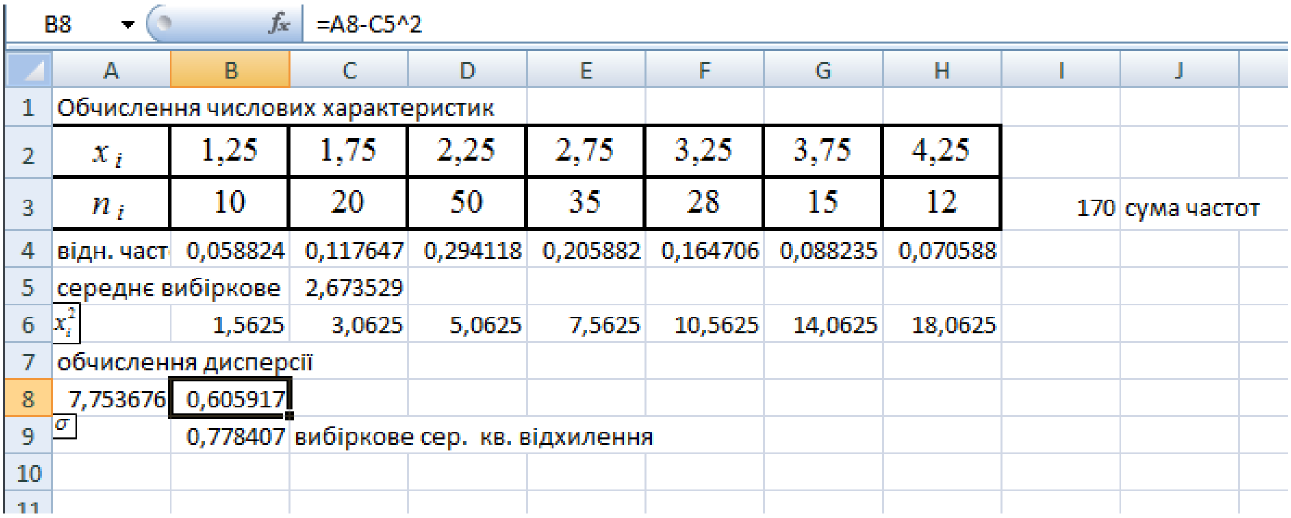
$$\overline{x}_{\text{В}} = \frac{\sum x_i n_i}{n} = = \frac{12,5 + 35 + 112,5 + 96,25 + 91 + 56,25 + 51,0}{170} = \frac{454,5}{170} = 2,67;$$

$$\frac{\sum x_i^2 n_i}{n} = \frac{1,25^2 \cdot 10 + 1,75^2 \cdot 20 + 2,25^2 \cdot 50 + 2,75^2 \cdot 35 + 3,25^2 \cdot 28 +}{170}$$

$$\frac{+3,75^2 \cdot 15 + 4,25^2 \cdot 12}{170} = \frac{1318,125}{170} = 7,75;$$

$$s^2 = \frac{\sum x_i^2 n_i}{n} - (\overline{x}_{\text{В}})^2 = 7,75 - (2,67)^2 = 7,75 - 7,1289 = 0,6211;$$

$$\sigma = \sqrt{s^2} = \sqrt{0,6211} \approx 0,79.$$



B8 =A8-C5^2

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	Обчислення числових характеристик									
2	x_i	1,25	1,75	2,25	2,75	3,25	3,75	4,25		
3	n_i	10	20	50	35	28	15	12	170	сума частот
4	відн. част	0,058824	0,117647	0,294118	0,205882	0,164706	0,088235	0,070588		
5	середнє вибіркове		2,673529							
6	x_i^2	1,5625	3,0625	5,0625	7,5625	10,5625	14,0625	18,0625		
7	обчислення дисперсії									
8	7,753676	0,605917								
9	σ	0,778407	вибіркове сер. кв. відхилення							
10										
11										

Рис. 3.7. Числові характеристики.

Обчислення теоретичних частот за формулою (3.17) подано в таблиці 3.7.

Таблиця 3.7

x_i	x_{i+1}	n_i	$z_i = \dfrac{x_i - \bar{x}_В}{\sigma_В}$	$z_{i+1} = \dfrac{x_{i+1} - \bar{x}_В}{\sigma_В}$	$\Phi(z_i)$	$\Phi(z_{i+1})$	$n_i' = n(\Phi(z_{i+1}) - \Phi(z_i))$
1	1,5	10	– 2,11	– 1,48	– 0,4821	– 0,4306	9
1,5	2	20	– 1,48	– 0,85	– 0,4306	– 0,3023	22
2	2,5	50	– 0,85	– 0,22	– 0,3023	0,0871	37
2,5	3	35	– 0,22	0,42	– 0,0871	0,1628	43
3	3,5	28	0,42	1,05	0,1628	0,3531	32
3,5	4	15	1,05	1,68	0,3531	0,4535	17
4	4,5	12	1,68	2,32	0,4535	0,4898	6

Обчислення спостережуваного значення статистичного критерію χ^2 подано нижче на рис. 3.8, де теоретичні частоти обчислені із використанням локальної формули Лапласа та, відповідно, використанням для функції **НОРМРАСП** логічного значення 0. Також критерій задано спрощеною формулою через відносні частоти.

C10 — f_x =J9*170

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1		Дискретний статистичний ряд								
2	Середина інтервала		1,25	1,75	2,25	2,75	3,25	3,75	4,25	Сума
3	Частота		10	20	50	35	28	15	12	170
4	Відносна частота		0,058824	0,117647	0,294118	0,205882	0,164706	0,088235	0,070588	1
5	Середнє вибіркове		2,6735	2,6735	2,6735	2,6735	2,6735	2,6735	2,6735	
6	Виб. кв. відхилення		0,7784	0,7784	0,7784	0,7784	0,7784	0,7784	0,7784	
7	Лок. ф. Лапласа		0,096271	0,253547	0,442008	0,510047	0,389581	0,196967	0,065917	
8	Теорет. частоти		0,048135	0,126774	0,221004	0,255023	0,19479	0,098483	0,032958	0,977169
9	(Pi-Wi)^2/Pi		0,002373	0,000657	0,024188	0,009469	0,004646	0,001066	0,042963	0,085363
10	X^2		14,51173							
11	Хи2обр		13,2767							
12	Гіпотеза не приймається									

Рис. 3.8. Обчислення для статистичного критерію.

Отже, маємо

$$\chi^2 = \sum \frac{(n_i - np_i)^2}{np_i} = 14{,}51.$$

За таблицею знаходимо значення

$$\chi^2_{\text{кр}}(\alpha = 0{,}01;\ k = 7 - 2 - 1 = 4) = \chi^2_{\text{кр}}(0{,}01;\ 4) = 13{,}3.$$

Правобічна критична область показана на рис. 3.9.

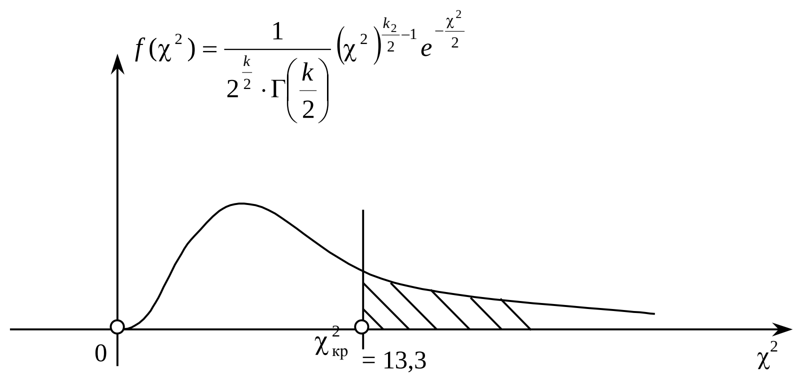


Рис. 3.9. Зображення критичної області та точки.

Висновок. Оскільки $\chi^2 \in [0;\ 13{,}3]$, то не маємо підстав для прийняття H_0 про нормальний закон розподілу ознаки генеральної сукупності X.

Приклад 2. Вимірювання зросту юнаків віком 17 років (табл. 3.8) дало такі результати:

Таблиця 3.8

$h = 4$	154–158	158–162	162–166	166–170	170–174	174–178	178–182	182–186
n_i	8	14	20	32	12	8	4	2

Визначити гіпотетично, який закон розподілу має ознака X – зріст юнака. При рівні значущості $\alpha = 0{,}01$ перевірити правильність висунутої нульової гіпотези.

Розв'язування. Для заданого статистичного розподілу побудуємо гістограму частот (рис. 3.10).

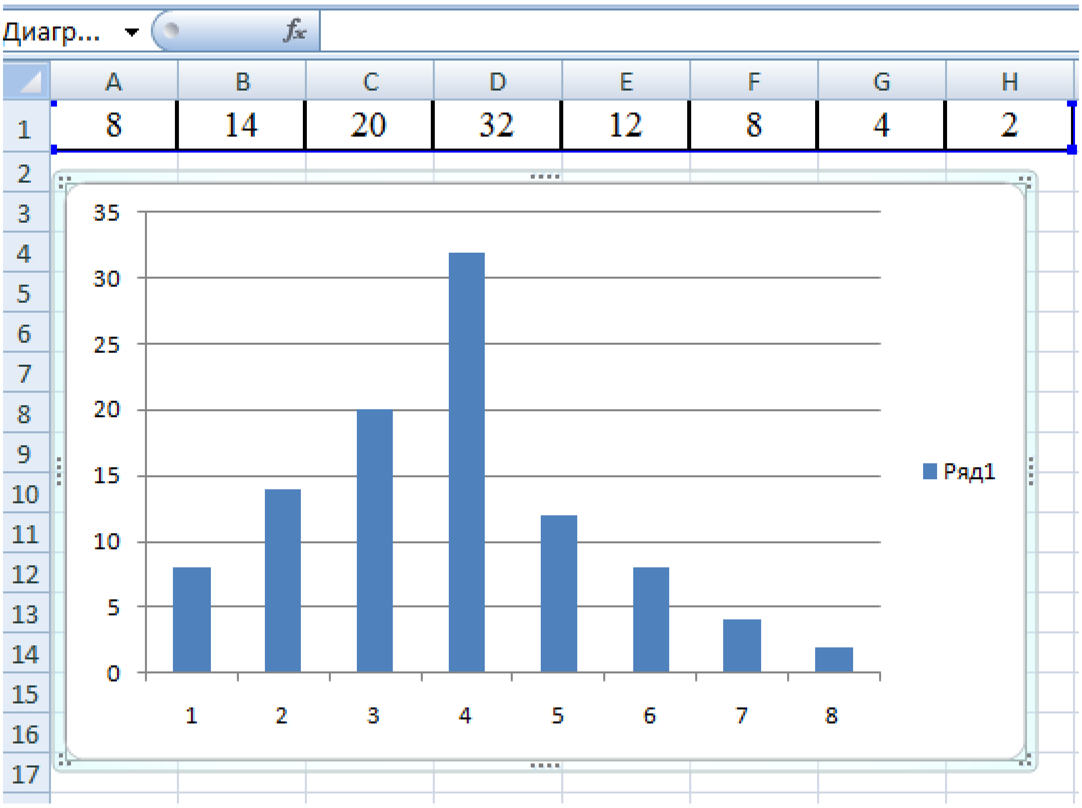


Рис. 3.10. Гістограма частот.

За формою гістограми частот можемо припустити, що ознака X має нормальний закон розподілу. Отже, висуваємо нульову гіпотезу H_0: ознака X має нормальний закон розподілу ймовірностей. Для перевірки справедливості H_0 використаємо критерій узгодженості Пірсона.

Отже, необхідно обчислити теоретичні частоти, а для цього знайдемо значення $\overline{x}_{\text{В}}$, σ, побудувавши дискретний розподіл за заданим інтервальним, а саме:

x_i	156	160	164	168	172	176	180	184
n_i	8	14	20	32	12	8	4	2

$$\overline{x}_B = \frac{\sum x_i n_i}{n} = \frac{156\cdot 8 + 160\cdot 14 + 164\cdot 20 + 168\cdot 32 +}{100}$$

$$\frac{+172\cdot 12 + 176\cdot 8 + 180\cdot 4 + 184\cdot 2}{100} = \frac{16704}{100} = 167,04;$$

$$\frac{\sum x_i^2 n_i}{n} = \frac{156^2\cdot 8 + 160^2\cdot 14 + 164^2\cdot 20 + 168^2\cdot 32 + 172^2\cdot 12 + 176^2\cdot 8 +}{100}$$

$$\frac{+180^2\cdot 4 + 184^2\cdot 2}{100} = \frac{2794304}{100} = 27943,04;$$

$$s^2 = \frac{\sum x_i^2 n_i}{n} - (\overline{x}_{\text{В}})^2 = 27943,04 - (167,04)^2 = 27943,04 - 27902,3616 = 40,68;$$

$$\sigma = \sqrt{s^2} = \sqrt{40,68} \approx 6,38.$$

Обчислення теоретичних частот наведено в табл. 3.9.

Таблиця 3.9

x_i	x_{i+1}	n_i	$z_i = \frac{x_i - \overline{x}_{\text{В}}}{\sigma_{\text{В}}}$	$z_{i+1} = \frac{x_{i+1} - \overline{x}_{\text{В}}}{\sigma_{\text{В}}}$	$\Phi(z_i)$	$\Phi(z_{i+1})$	$n_i' = n(\Phi(z_{i+1}) - \Phi(z_i))$
154	158	8	– 2,04	– 1,42	– 0,4793	– 0,4222	6
158	162	14	– 1,42	– 0,79	– 0,4222	– 0,2852	14
162	166	20	– 0,79	– 0,16	– 0,2852	– 0,0636	22
166	170	32	– 0,16	0,464	– 0,0636	0,1772	24
170	174	12	0,464	1,09	0,1772	0,3621	19
174	178	8	1,09	1,72	0,3621	0,4573	10
178	182	4	1,72	2,34	0,4573	0,4904	3
182	186	2	2,34	2,97	0,4904	0,4986	1

Обчислення спостережуваного значення χ^2 наведено нижче в таблиці:

n_i	np_i	$n_i - np_i$	$(n_i - np_i)^2$	$\frac{(n_i - np_i)^2}{np_i}$
8	6	2	4	0,667
14	14	0	0	0
20	22	– 2	4	0,182
32	24	8	64	2,667
12	19	– 7	49	2,579
8	10	– 2	4	0,4
4	3	1	1	0,333
2	1	1	1	1

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{8} \frac{(n_i - np_i)^2}{np_i} = 7,828.$$

За таблицею (додаток) знаходимо значення

$$\chi^2_{\alpha,k}(\alpha = 0,01;\ k = 8-2-1) = \chi^2_{\alpha,k}(0,01;\ 5) = 15,1.$$

Критична область даного прикладу зображена на рис. 3.11.

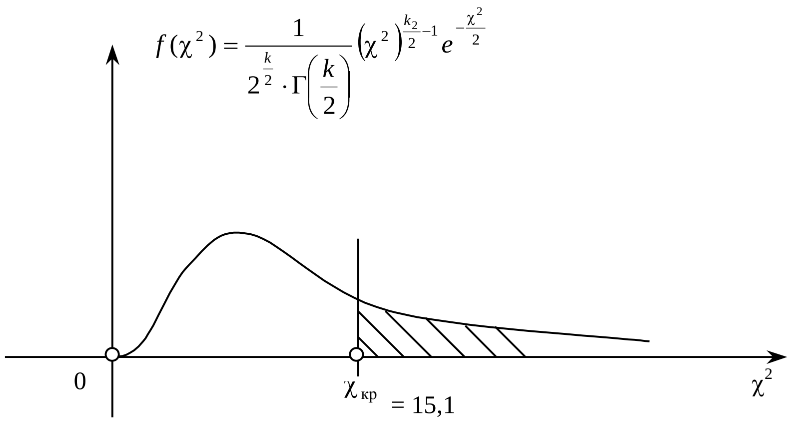


Рис. 3.11. Критична область.

Висновок. Оскільки $\chi^2 \in [0;\ 15,1]$, немає підстав для відхилення нульової гіпотези H_0 про нормальний закон розподілу ймовірностей ознаки X.

Приклад 3. За наданим інтервальним статистичним рядом (табл. 3.10) знайти закон розподілу випадкової величини X.

Таблиця 3.10

$[a_i; a_{i+1})$	[–2;–1,2)	[–1,2;–0,4)	[–0,4;0,4)	[0,4;1,2)	[1,2;2)
n_i	6	11	21	7	5

Розв'язування. Для визначення виду закону розподілу побудуємо гістограму за даними таблиці 3.10 (рис. 3.12). За видом гістограми висуваємо гіпотезу про нормальний закон розподілу даної випадкової величини:

H_0 – випадкова величина X розподілена за нормальним законом;

H_1 – випадкова величина X не розподілена за нормальним законом.

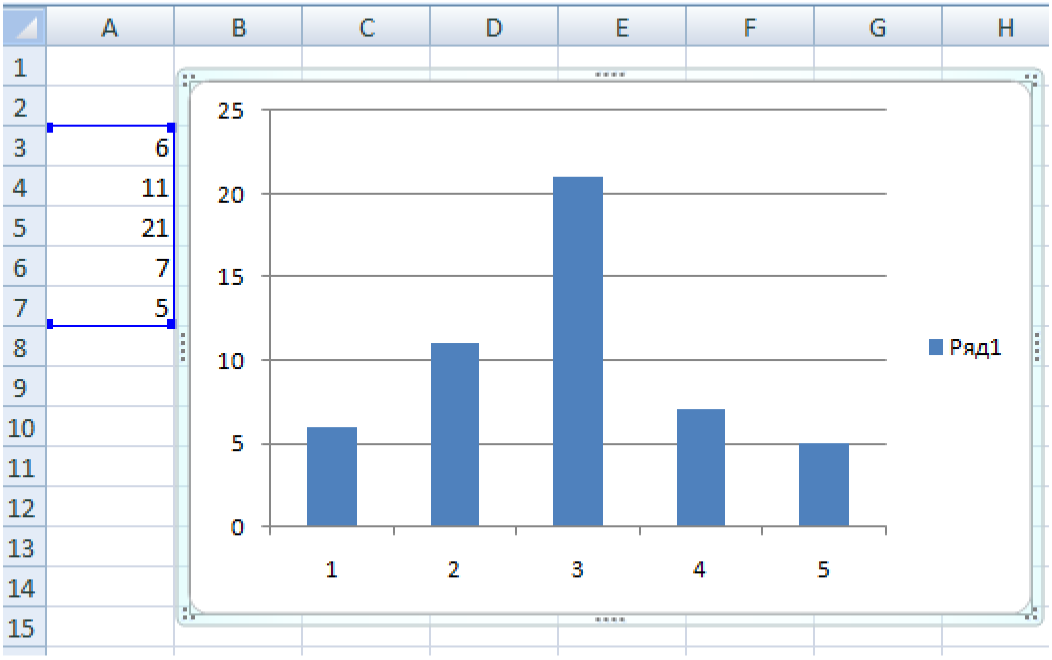


Рис.3.12. Гістограма за даними таблиці 3.10.

Щільність розподілу випадкової величини, розподіленої за нормальним законом має вид $f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$, де a і σ – параметри розподілу. Знайдемо означені параметри, враховуючи, що $\bar{x}=a$; $S^2=\sigma^2$. Розрахунки оформимо у вигляді таблиці (табл. 3.11).

Таблиця 3.11

$[a_i;a_{i+1})$	[–2;–1,2)	[–1,2;–0,4)	[–0,4;0,4)	[0,4;1,2)	[1,2;2)
n_i	6	11	21	7	5
x_i	-1,6	-0,8	0	0,8	1,6
$x_i n_i$	-9,6	-8,8	0	5,6	8
$(x_i-\bar{x})^2 n_i$	13,572	5,452	0,194	5,620	14,382

Знайдемо вибіркове середнє, вибіркову дисперсію і вибіркове середнє квадратичне відхилення за відповідними формулами:

$$\overline{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}x_i n_i=\frac{1}{50}(-1,6\cdot 6-0,8\cdot 11+0\cdot 21+0,8\cdot 7+1,6\cdot 5)=-0,096;$$

$$s^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}(x_i-\overline{x})^2 n_i=\frac{1}{50}(13,572+5,452+0,194+5,620+14,382)=0,7844;$$

$$\sigma=\sqrt{s^2}\approx 0,886.$$

Отже, параметрами теоретичного закону розподілу є величини: $\overline{x}=a=-0,096; \quad s=\sigma=0,886.$

Для знаходження значення критерію χ^2 розрахуємо теоретичні частоти n_i'. Для зручності обчислень побудуємо табл. 3.12.

Таблиця 3.12.

$[a_i;a_{i+1})$	$[-2;-1,2)$	$[-1,2;-0,4)$	$[-0,4;0,4)$	$[0,4;1,2)$	$[1,2;2)$
n_i	6	11	21	7	5
x_i	-1,6	0,8	0	0,8	1,6
$x_i n_i$	-9,6	8,8	0	5,6	8
$\left(x_i-\overline{x}\right)^2 n_i$	13,572	5,452	0,194	5,620	14,382
$\frac{a_i-\overline{x}}{S}$	-2,1498	-1,2465	-0,3433	0,56	1,4633
$\Phi(\frac{a_i-\overline{x}}{S})$	-0,958	-0,785	-0,266	0,425	0,856
p_i	0,0856	0,2595	0,3455	0,2155	0,063
$n_i'=np_i$	4,325	12,975	17,275	10,775	3,15
$\frac{\left(n_i-n_i'\right)^2}{n_i'}$	0,649	0,301	0,803	1,323	1,087

За формулою критерію маємо

$$\chi^2=\sum_{i=1}^{k}\frac{\left(n_i-n_i'\right)^2}{n_i'}\approx 4,16.$$

Знайдемо критичне значення $\chi^2_{\alpha,l}$, враховуючи, що $l=k-r-1$=5-2-1=2. Рівень значущості α оберемо рівним 0,1. За допомогою Microsoft Excel знаходимо **ХИ2ОБР**(0,1; 2)=4,6.

Отже, оскільки $\chi^2 < \chi^2_{\alpha,l}$, гіпотеза H_0 про нормальний розподіл приймається, гіпотеза H_1 відкидається.

Дані вимірювань на одному із поліграфічних виробництв та їх статистична обробка [16]

Приклад 4. Дані вимірювань з перших трьох текстових накладів, друкування яких здійснювалось в різні дні декілька разів по 100 відбитків, було використано для перевірки підлягання отриманих значень у вибірках нормальному закону розподілу за критерієм Пірсона.

Розглядається приклад перевірки нормальному розподілу вибірки з вимірювання значень, отриманих на ділянці дії фарбового ножа № 3 для тесту, де вимірювання було проведено на відбитку № 90, для якого значення можна вважати стабілізованими. В табл. 3.13 наведено дані поведених вимірювань, де ΔE – колірні відмінності виміряного кольору від еталонного значення, D – оптична густина фарби, 80, 40 – розтискування растрової точки (80+k, вказано k) при стабільній подачі фарби та зволожувального розчину.

Таблиця 3.13

Результати вимірювання відбитка з тестовим зображенням

№ вимірювання	ΔE	D	ΔSвідн 80%	ΔSвідн 40%
1	*2*	*3*	*4*	*5*
1	16,24	0,89	5	6
2	16,11	0,89	5	7
3	16,21	0,86	5	7
4	16,25	0,89	4	7
5	16,19	0,93	4	7
6	16,18	0,9	5	7
7	16,31	0,91	5	7
8	16,17	0,97	5	7
9	16,2	0,91	5	7

10	16,12	0,9	5	7
11	16,22	0,92	4	7
12	16,18	0,94	5	7
13	16,23	0,88	5	7
14	16,09	0,89	5	6
15	16,25	0,93	5	7
16	16,17	0,89	4	7
17	16,21	0,87	4	7
18	16,25	0,89	5	7
19	16,19	0,92	4	7
20	16,16	0,93	5	7
21	16,2	0,89	5	7
22	16,19	0,95	5	6
23	16,28	0,93	5	7
24	16,13	0,91	4	7
25	16,17	0,9	5	7
26	16,2	0,91	5	7
27	16,28	0,93	5	7
28	16,15	0,91	5	7
29	16,17	0,9	4	7
30	16,2	0,91	5	7
31	16,12	0,9	4	7
32	16,22	0,92	5	7
33	16,18	0,94	4	7
34	16,29	0,88	5	7
35	16,09	0,89	5	7
36	16,25	0,93	5	6
37	16,11	0,89	5	7
38	16,21	0,87	5	7
39	16,09	0,89	5	7
40	16,24	0,9	5	7
41	16,11	0,89	4	7
42	16,31	0,87	5	7
43	16,25	0,89	4	7
44	16,19	0,92	5	7

45	16,22	0,88	5	6
<X>	16,2	0,9	4,73	6,89
Σ	0,0596	0,0234	0,4539	0,2939

У наведеній вище таблиці одразу подано пораховані значення середнього арифметичного значення вибірки та середньоквадратичного відхилення.

Згідно з методикою розрахунку *за критерієм Пірсона*, визначаємо інтервали для кожної з вибірок (для Δ*E, D,* ΔS відн 80 % та ΔS відн 40 %) та кількість значень, що у них потрапляють. Розраховуємо ймовірності потрапляння випадкового значення у задані інтервали відповідно до очікуваного середнього значення та середньоквадратичного відхилення, використовуючи функцію пакету MS Excel **НОРМРАСП**(x; $x_{ср}$; σ; 1).

Після цього, коригуючи отримані значення ймовірностей (за необхідної для критерію Пірсона умови, що сума ймовірностей обов’язково повинна бути рівною 1), розраховуємо величини χ^2-статистики.

Розраховане значення порівнюємо з критичним, яке також попередньо розрахуємо за формулою в MS Excel **ХИ2ОБР**($\alpha;k$). Для кожної з вибірок кількість степенів вільності буде дещо відрізнятись, наприклад, у даному випадку для вибірки за ΔE $k = 2$, для вибірки за D $k = 9$, а для вибірок за ΔS відн 80 % за ΔS відн 40 % $k = 1$.

У всіх випадках розрахунки показують, що оскільки значення величин χ^2 є меншими за значення $\chi^2_{крит}$ (5,723<5.99146; 12,39<16,9189; 2,837<3,8414; 1,007<3,8414), то гіпотеза про відповідність вибірок нормальному закону розподілу приймається.

Зауваження. Обчислення проведено за допомогою функцій пакету MS Excel.

В табл. Б.1, Б.2, Б.3 та Б.4 показані розрахунки відповідності нормальному розподілу вибірки даних за Δ***E***, за *D*, за ΔS відн 80 % та ΔS відн 40 %, відповідно. *Зауваження.* В таблицях нижче ряд даних є наближеними, тому можливі, на перший погляд, неточності.

Таблиця Б.1

Розрахунок відповідності нормальному розподілу вибірки за ΔЕ

Знач. ΔЕ	К-ть елем. n_i	$x_{i\min}$	$x_{i\max}$	$P(x_{i\min})$	$P(x_{i\max})$	p_i	np_i	$n_i - np_i$	$\frac{(n_i - np_i)^2}{np_i}$
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
16,10	8,00	16,075	16,125	0,022	0,120	0,098	4,6	3,4	2,585
16,15	7,00	16,125	16,175	0,120	0,368	0,248	11,6	-4,6	1,820
16,20	17,00	16,175	16,225	0,368	0,692	0,324	15,1	1,9	0,228
16,25	8,00	16,225	16,275	0,692	0,910	0,218	10,2	-2,2	0,467
16,30	5,00	16,275	16,325	0,910	0,985	0,075	3,5	1,5	0,623

n= 45 Σ=0,963 χ^2= 5,723

5,9914645

*n**= 47 $\chi^2_{крит}$= 4

k= 2,00

Таблиця Б.2

Розрахунок відповідності нормальному розподілу вибірки за *D*

Знач. D	К-ть елем.	$x_{i\min}$	$x_{i\max}$	$P(x_{i\min})$	$P(x_{i\max})$	p_i	np_i	$n_i - np_i$	$\frac{(n_i - np_i)^2}{np_i}$
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0,86	1,00	0,855	0,865	0,017	0,045	0,028	1,3	-0,3	0,067
0,87	3,00	0,865	0,875	0,045	0,103	0,058	2,6	0,4	0,050
0,88	3,00	0,875	0,885	0,103	0,201	0,098	4,5	-1,5	0,494
0,89	12,00	0,885	0,895	0,201	0,340	0,139	6,4	5,6	4,936
0,9	6,00	0,895	0,905	0,340	0,506	0,166	7,6	-1,6	0,335
0,91	6,00	0,905	0,915	0,506	0,607	0,165	7,5	-1,5	0,318
0,92	4,00	0,915	0,925	0,670	0,807	0,137	6,3	-2,3	0,823
0,93	6,00	0,925	0,935	0,807	0,902	0,095	4,4	1,6	0,620
0,94	2,00	0,935	0,945	0,902	0,957	0,027	2,5	-0.5	0,111
0,95	1,00	0,945	0,955	0,957	0,984	0,011	1,2	-0,2	0,042
0,96	0,00	0,955	0,965	0,984	0,995	0,004	0,5	-0,5	0,498
0,97	1,00	0,965	0,975	0,995	0,999	0,004	0,2	0,8	4,098

n=45 Σ=0,982 χ^2= 12,390

*n**=46 $\chi^2_{крит}$= 16,91897762

k=9,00

Таблиця Б.3

Розрахунок відповідності нормальному розподілу вибірки за ΔS відн 80 %

Знач. ΔS	К-ть елем.	$x_{i\min}$	$x_{i\max}$	$P(x_{i\min})$	$P(x_{i\max})$	p_i	np_i	$n_i - np_i$	$\frac{(n_i - np_i)^2}{np_i}$
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
3,00	0,00	2,5	3,500	0,000	0,003	0,003	0,1	-0,1	0,148
4,00	12,00	3,500	4,500	0,003	0,304	0,300	13,5	-1,5	0,170
5,00	33,00	4,500	5,500	0,304	0,954	0,651	29,3	3,7	0,470
6,00	0,00	5,500	6,500	0,954	1,000	0,046	2,0	-2,0	2,049

n=45 Σ=1,000 χ^2=2,837

n*=45 $\chi^2_{крит}$=3,841459149

k=1,00

Таблиця Б.4

Розрахунок відповідності нормальному розподілу вибірки за ΔS відн 40 %

Знач. ΔS	К-ть елем.	$x_{i\min}$	$x_{i\max}$	$P(x_{i\min})$	$P(x_{i\max})$	p_i	np_i	$n_i - np_i$	$\frac{(n_i - np_i)^2}{np_i}$
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
5	0,00	4,5	5,500	0,000	0,000	0,000	0,0	0,0	0,000
6	5,00	5,500	6,500	0,000	0,093	0,093	4,2	0,8	0,161
7	40,00	6,500	7,500	0,093	0,981	0,888	40,0	0,0	0,000
8	0,00	7,500	8,500	0,981	1,000	0,019	0,8	-0,8	0,846

n=45 Σ=1,000 χ^2=1,007

n*=45 $\chi^2_{крит}$=3,841459149

k=1,00

На основі отриманих даних зроблено висновок про те, що дійсно дані експериментальних вимірювань підлягають нормальному розподілу.

Рекомендовані завдання для ДКР (або опрацювання своїх зібраних експериментальних даних)

Користуючись теоретичними знаннями та засобами програмного забезпечення Microsoft Excel:

1) Побудувати таблицю статистичного розподілу.

2) Побудувати гістограму.

3) Вирівняти дослідні дані за допомогою нормального закону розподілу.

4) Перевірити узгодженість між емпіричними та теоретичними даними за допомогою критерія Пірсона та Романовського.

Варіант 1

2,37	-0,94	0,58	-0,38	-0,72	0,76	1,55	-0,53	1,41	1,03
-0,06	0,29	0,06	1,40	0,32	1,65	0,61	2,72	-1,03	0,48
0,61	2,05	1,12	-0,94	0,46	1,18	0,93	0,48	0,34	0,48
-0,50	1,58	1,39	2,30	0,83	1,19	-0,48	0,93	1,07	0,84
1,34	1,14	1,48	3,08	2,73	-1,14	-0,48	1,63	1,31	0,08
-0,10	1,52	2,41	0,16	0,31	0,60	2,75	-0,01	0,33	-0,13
0,51	0,81	-0,23	1,26	1,89	0,89	1,93	1,02	2,26	0,31
1,97	2,48	1,88	1,96	1,67	0,08	0,66	0,98	1,91	-0,11
0,67	1,18	2,30	3,15	1,24	0,81	0,73	0,65	0,79	0,63
1,45	1,31	1,42	1,23	1,84	1,99	2,05	2,50	2,55	2,90

Варіант 2

1,60	0,07	0,90	0,39	0,19	0,76	1,29	0,14	1,01	0,27
1,15	0,70	0,56	1,05	0,65	1,37	0,83	1,76	-0,04	0,72
0,96	1,70	1,13	0,19	0,70	1,06	0,96	0,71	0,68	0,66
0,20	1,29	1,01	1,55	0,80	1,19	0,35	0,77	1,15	0,85
1,19	1,11	1,16	2,02	1,88	-0,02	0,50	1,49	1,20	0,54
0,31	1,42	1,54	0,74	0,59	0,83	1,91	0,38	0,56	0,37
0,77	0,80	0,28	1,23	1,26	0,76	1,40	1,15	1,53	0,62
1,36	1,62	1,36	1,40	1,43	0,64	0,84	0,78	1,47	0,47
0,93	1,01	1,54	2,15	1,07	0,81	0,82	0,78	0,85	0,97
1,06	1,16	1,04	1,24	1,35	1,44	1,66	1,69	1,97	1,79

Варіант 3

3,33	0,18	1,52	0,99	0,38	1,74	2,78	0,23	2,20	0,67
2,19	1,46	1,03	2,09	1,38	2,83	1,81	3,53	-0,47	1,25
1,61	3,36	2,41	0,21	1,27	2,29	1,73	1,01	1,49	1,21
0,22	2,67	2,28	3,19	1,62	2,28	0,98	1,88	2,38	1,54
2,18	2,41	2,41	4,29	3,58	-0,27	0,83	2,88	2,21	1,16
0,86	2,85	3,07	1,36	1,33	1,95	3,96	0,67	1,02	0,85
1,96	1,61	0,64	2,46	2,56	1,90	2,88	2,45	3,42	1,23

2,62	3,05	2,64	2,59	2,60	1,28	1,90	1,97	2,85	0,84
1,94	2,28	3,09	4,17	2,02	1,82	1,84	1,97	1,66	1,86
2.40	2,01	2,41	2,47	2,99	2,67	3,47	3,38	3,94	3,54

Варіант 4

2,57	1,10	1,82	1,42	1,14	1,94	2,41	1,07	2,07	1,27
2,25	1,54	1,52	2,16	1,66	2,48	1,89	2,77	0,75	1,71
1,78	2,63	2,01	1,24	1,61	2,19	1,79	1,68	1,65	1,61
1,24	2,40	2,04	2,55	1,82	2,00	1,33	1,84	2,05	1,78
2,23	2,23	2,22	3,18	2,80	0,86	1,42	1,64	2,32	2,55
1,38	2,39	2,70	1,59	1,52	1,77	2,87	1,28	1,57	1,33
1,89	1,78	1,26	2,13	2,35	1,99	2,32	2,06	2,51	1,72
2,40	2,65	2,34	2,26	2,29	1,69	1,84	1,93	2,37	1,31
1,97	2,06	2,69	3,23	2,10	1,76	1,83	1,82	1,91	1,83
2,01	2,13	2,03	2,06	2,49	2,37	2,55	2,65	2,89	2,78

Варіант 5

4,24	1,32	2,80	1,95	1,47	2,55	3,90	1,18	3,36	1,79
3,04	2,11	2,30	3,08	2,32	3,87	2,61	4,90	0,93	2,29
2,64	4,26	3,01	1,06	2,13	3,39	2,60	2,07	2,46	2,22
1,08	3,79	3,17	4,18	2,51	3,39	1,90	2,63	3,37	2,82
3,28	3,04	3,37	5,32	4,73	0,62	1,99	3,97	3,27	2,02
1,65	3,72	4,26	2,00	2,25	2,55	4,78	1,63	2,07	1,92
2,84	2,56	1,75	3,31	3,56	2,67	3,54	3,16	4,06	2,45
3,99	4,43	3,83	3,69	3,56	2,05	2,86	2,61	3,69	1,65
2,96	3,04	4,37	5,23	3,40	2,54	2,54	2,59	2,60	2,77
3,20	3,06	3,14	3,32	3,94	3,94	4,43	4,23	4,98	4,64

Додатки

Додаток 1

Аналітична геометрія на площині

Пряма на площині

Рівняння прямої через точку $M_0(x_0, y_0) \perp$ до вектора $\vec{N}(A, B)$:

$A(x-x_0)+B(y-y_0)=0$. Загальне рівняння прямої: $Ax+By+C=0$. Кут φ між двома прямими, які задані загальними рівняннями $A_1x+B_1y+C_1=0$ і

$A_2x+B_2y+C_2=0$: $\cos\varphi=\dfrac{A_1A_2+B_1B_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2}}$.

Рівняння прямої через точку $M_0(x_0, y_0)$, паралельно вектору $\vec{l}(m, n)$:

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}.$$

Рівняння прямої через дві точки $M_0(x_0, y_0)$, $M_1(x_1, y_1)$: $\dfrac{x-x_0}{x_1-x_0}=\dfrac{y-y_0}{y_1-y_0}$.

Параметричні рівняння прямої: $\begin{cases} x=x_0+mt, \\ y=y_0+nt. \end{cases}$

Рівняння прямої через точку $M_0(x_0, y_0)$ з кутовим коефіцієнтом k:

$y-y_0=k(x-x_0)$.

Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом k: $y=kx+b$. Для прямих $y=k_1x+b_1$, $y=k_2x+b_2$ тангенс кута між ними через їх кутові коефіцієнти обчислюють за формулою $\operatorname{tg}\alpha=\left|\dfrac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}\right|$.

Прямі перпендикулярні: $k_1\cdot k_2=-1$.

Відстань від точки $M(x_0, \ y_0)$ до прямої $Ax+By+C=0$: $d=\dfrac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$.

Криві 2-го порядку

Рівняння кола з центром в точці $M_0(x_0, y_0)$ радіуса R: $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$.

Рівняння еліпса з центром в точці $O(0,0)$, $M_0(x_0, y_0)$:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \quad \frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1.$$

Рівняння гіперболи з центром в точці $O(0,0)$, $M_0(x_0, y_0)$:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=\pm1, \quad \frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=\pm1.$$

Рівняння параболи з вершиною $O(0,0)$, $M_0(x_0, y_0)$:

$$y^2=2px, \ \ x^2=2py; \ \ (y-y_0)^2=2p(x-x_0), \ \ (x-x_0)^2=2p(y-y_0).$$

Додаток 2

Аналітична геометрія в просторі

Пряма в просторі

Рівняння прямої через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$, паралельно вектору $\vec{l}(m, n, p)$:

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}.$$

Кут між двома прямими $\frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1}$ і $\frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{p_2}$:

$$\cos\varphi=\frac{m_1 m_2+n_1 n_2+p_1 p_2}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}\cdot\sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}}.$$

Умова паралельності двох прямих: $\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}=\frac{p_2}{p_2}$,

умова перпендикулярності: $m_1 m_2+n_1 n_2+p_1 p_2=0$.

Рівняння прямої через дві точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$, $M_1(x_1, y_1, z_1)$: $\frac{x-x_0}{x_1-x_0}=\frac{y-y_0}{y_1-y_0}=\frac{z-z_0}{z_1-z_0}$

Параметричні рівняння прямої через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$, паралельно вектору $\vec{l}(m, n, p)$: $x=x_0+mt,\ y=y_0+nt,\ z=z_0+pt$.

Загальні рівняння прямої: $\begin{cases} A_1 x+B_1 y+C_1 z+D_1=0, \\ A_2 x+B_2 y+C_2 z+D_2=0 \end{cases}$.

Площина в просторі

Рівняння площини через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$, $\perp$ до вектора $\vec{N}(A, B, C)$:

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0.$$

Рівняння площини у відрізках на осях: $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$.

Загальне рівняння площини: $Ax+By+Cz+D=0$.

Рівняння площини через точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$, $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$:

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ x_1-x_0 & y_1-y_0 & z_1-z_0 \\ x_2-x_0 & y_2-y_0 & z_2-z_0 \end{vmatrix}=0.$$

Кут між площинами: $\cos\varphi=\frac{\overrightarrow{N_1}\,\overrightarrow{N_2}}{\left|\overrightarrow{N_1}\right|\left|\overrightarrow{N_2}\right|}$, $\cos\varphi=\frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}$.

Відстань від точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ до площини $Ax+By+Cz+D=0$:

$$d=\frac{\left|Ax_0+By_0+Cz_0+D\right|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

Пряма і площина в просторі

Кут між прямою $\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$ і площиною $Ax+By+Cz+D=0$:

$$\sin\varphi=\frac{|Am+Bn+Cp|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{m^2+n^2+p^2}}.$$

Умова паралельності прямої і площини: $Am+Bn+Cp=0$, а умова перпендикулярності $\frac{A}{m}=\frac{B}{n}=\frac{C}{p}$.

Поверхні 2-го порядку

Сфера: $x^2+y^2+z^2=R^2$, *еліпсоїд:* $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$.

Циліндри 2-го порядку: круговий $x^2+y^2=R^2$; еліптичний $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$; гіперболічний $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$; параболічний $y^2=2px$.

Конус $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$.

Гіперболоїди: однопорожнинний $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$, двопорожнинний $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$.

Параболоїд: еліптичний $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2z$; гіперболічний $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2z$.

Додаток 3

Функція однієї змінної

Дві важливі границі: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$; $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{-x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(1\pm x\right)^{\pm\frac{1}{x}}=e.$

Основні еквівалентні величини:

$\sin x\sim x,\quad x\to 0$; $\ln(1+x)\sim x$, $\log_a(1+x)\sim(\log_a e)x,\ x\to 0$; $e^x-1\sim x,\ a^x-1\sim x\ln a,\ x\to 0;$

$\arcsin x\sim x,\ x\to 0$; $\mathrm{tg}x\sim x,\ x\to 0$; $\mathrm{arctg}x\sim x,\ x\to 0$; $(1+x)^{\mu}-1\sim \mu x,\ x\to 0.$

Рівняння дотичної і нормалі

$$y-y_0=f'\left(x_0\right)\left(x-x_0\right),\qquad y-y_0=-\frac{1}{f'\left(x_0\right)}\left(x-x_0\right),\ k=\mathrm{tg}\alpha=f'(x_0).$$

Екстремуми функцій

Точки, в яких $f'(x_o)=0$ – критичні точки функції. Якщо похідна змінює знак з «+» на «–», то точка x_0 – точка максимума, якщо з «–» на «+», то точка мінімума.

Значення функцій деяких кутів

$\sin 0=0,\quad \sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2},\quad \sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2},\quad \sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2},\quad \sin\frac{\pi}{2}=1,\quad \sin\pi=0,\quad \sin\frac{3\pi}{2}=-1;$

$\cos 0=1,\quad \cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2},\quad \cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2},\quad \cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2},\quad \cos\frac{\pi}{2}=0,\quad \cos\pi=-1,\quad \cos\frac{3\pi}{2}=0;$

$\mathrm{tg}\,0=0,\quad \mathrm{tg}\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{3},\quad \mathrm{tg}\frac{\pi}{4}=1,\quad \mathrm{tg}\frac{\pi}{3}=\sqrt{3},\quad \mathrm{tg}\frac{\pi}{2}$ – не існує;

$\mathrm{ctg}\,0$ – не існує, $\quad \mathrm{ctg}\frac{\pi}{6}=\sqrt{3},\quad \mathrm{ctg}\frac{\pi}{4}=1,\quad \mathrm{ctg}\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{3},\quad \mathrm{ctg}\frac{\pi}{2}=0.$

Додаток 4
Табличне диференціювання

I. Таблиця похідних основних функцій

1. $\left(x^n\right)' = nx^{n-1}$.
2. $\left(\sqrt{x}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} \quad (x > 0)$.
3. $(\sin x)' = \cos x$.
4. $(\cos x)' = -\sin x$.
5. $(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$.
6. $(\operatorname{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$.
7. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (|x| < 1)$.
8. $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (|x| < 1)$.
9. $(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$.
10. $(\operatorname{arcctg} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$.
11. $(a^x)' = a^x \ln a$.
12. $(e^x)' = e^x$.
13. $(\ln x)' = \dfrac{1}{x} \quad (x > 0)$.
14. $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a} = \dfrac{\log_a e}{x} \quad (x > 0,\ a > 0)$.
15. $(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x$.
16. $(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$.
17. $(\operatorname{th} x)' = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$.
18. $(\operatorname{cth} x)' = -\dfrac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$.

II. Основні правила обчислення похідної. Якщо C – стала величина і $u = \varphi(x), v = \psi(x)$ – диференційовані функції, тоді

1) $(C)' = 0$,
2) $(x)' = 1$,
3) $(u \pm v)' = u' \pm v'$,
4) $(Cu)' = Cu'$,
5) $(uv)' = u'v + uv'$,
6) $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - v'u}{v^2} \quad (v \neq 0)$,
7) $\left(\dfrac{C}{v}\right)' = -\dfrac{Cv'}{v^2} \quad (v \neq 0)$.

III. Правило диференціювання складеної функції. Якщо $y = f(u), u = \varphi(x)$, тобто $y = f\left[\varphi(x)\right]$, де функції y і u мають похідні, тоді

$$y_x' = y_u' \cdot u_x'$$

або в інших позначеннях $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{du} \cdot \dfrac{du}{dx}$.

Додаток 5

Таблиця основних інтегралів

1. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1$, $\left(\int dx = x + C, \quad \int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C, \quad \int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} + C \right)$.

2. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C.$

3. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C.$

4. $\int e^x dx = e^x + C.$

5. $\int \sin x dx = -\cos x + C.$

6. $\int \cos x dx = \sin x + C.$

7. $\int \mathrm{tg} x dx = -\ln|\cos x| + C.$

8. $\int \mathrm{ctg} x dx = \ln|\sin x| + C.$

9. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \mathrm{tg} x + C.$

10. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\mathrm{ctg} x + C.$

11. $\int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left|\mathrm{tg}\frac{x}{2}\right| + C.$

12. $\int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left|\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)\right| + C.$

13. $\int \mathrm{sh} x dx = \mathrm{ch} x + C.$

14. $\int \mathrm{ch} x dx = \mathrm{sh} x + C.$

15. $\int \frac{dx}{\mathrm{sh}^2 x} = -\mathrm{cth} x + C.$

16. $\int \frac{dx}{\mathrm{ch}^2 x} = \mathrm{tg} x + C.$

17. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C.$

18. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 + a}\right| + C.$

19. $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a}\mathrm{arctg}\frac{x}{a} + C.$

20. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C.$

21. $\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + C.$

22. $\int \sqrt{x^2 + a}\, dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 + a} + \frac{a}{2}\ln\left|x + \sqrt{x^2 + a}\right| + C.$

Формула Ньютона-Лейбніца $\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$

Формула інтегрування частинами у визначеному інтегралі: $\int_a^b u\, dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v\, du.$

Таблиці значень основних функцій та розподілів

Таблиця 1

Таблиця значень функції $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0,4	3683	3668	3653	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1,0	0,2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2035	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1,3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0941	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
2,0	0,0540	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2,2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2,3	0283	0271	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2,4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2,5	0175	0171	0167	0163	0159	0155	0151	0147	0143	0139
2,6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2,9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046
3,0	0,0044	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034
3,1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025
3,2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3,3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013
3,4	0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009
3,5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006
3,6	0006	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004
3,7	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003	0003
3,8	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002
3,9	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	0001

Таблиця 2

Таблиця значень функції Лапласа $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,00000	00399	00798	01197	01595	01994	02392	02790	03188	03586
0,1	03983	04380	04776	05172	05567	05962	06356	06749	07142	07535
0,2	07926	08317	08706	09095	09483	09871	10257	10642	11026	11409
0,3	11791	12172	12552	12930	13307	13683	14058	14431	14803	15173
0,4	15542	15910	16276	16640	17003	17364	17724	18082	18439	18793
0,5	19146	19497	19847	20194	20540	20884	21226	21566	21904	22240
0,6	22575	22907	23237	23565	23891	24215	24537	24857	25175	25490
0,7	25804	26115	26424	26730	27035	27337	27637	27935	28230	28524
0,8	28814	29103	29389	29673	29955	30234	30511	30785	31057	31327
0,9	31594	31859	32121	32381	32639	32894	33147	33398	33646	33891
1,0	34134	34375	34614	34850	35083	35314	35543	35769	35993	36214
1,1	36433	36650	36864	37076	37286	37493	37698	37900	38100	38298
1,2	38493	38686	38877	39065	39251	39435	39617	39796	39973	40147
1,3	40320	40490	40658	40824	40988	41149	41309	41466	41621	41774
1,4	41924	42073	42220	42364	42507	42647	42786	42922	43056	43189
1,5	43319	43448	43574	43699	43872	43943	44062	44179	44295	44408
1,6	44520	44630	44738	44845	44950	45053	45154	45254	45352	45449
1,7	45543	45637	45728	45818	45907	45994	46080	46164	46246	46327
1,8	46407	46485	46562	46638	46712	46784	46856	46926	46995	47062
1,9	47128	47193	47257	47320	47381	47441	47500	47558	47615	47670
2,0	47725	47778	47831	47882	47932	47982	48030	48077	48124	48169
2,1	48214	48257	48300	48341	48382	48422	48461	48500	48537	48574
2,2	48610	48645	48679	48713	48745	48778	48809	48840	48860	48899
2,3	48928	48966	48983	49010	49036	49061	49086	49110	49134	49158
2,4	49180	49202	49224	49245	49266	49286	49305	49324	49343	49361
2,5	49379	49396	49413	49430	49446	49461	49477	49492	49506	49520
2,6	49534	49547	49560	49573	49585	49598	49609	49621	49632	49643
2,7	49653	49664	49674	49683	49693	49702	49711	49720	49728	49736
2,8	49744	49752	49760	49767	49774	49781	49788	49795	49801	49807
2,9	49813	49819	49825	49831	49836	49841	49846	49851	49856	49861
3,0	0,49865		3,1	49903	3,2	49931	3,3	49952	3,4	49966
3,5	49977		3,6	49984	3,7	49989	3,8	49993	3,9	49995
4,0	499968									
4,5	499997									
5,0	49999997									

Таблиця 3

Таблиця значень χ^2 в залежності від k і рівня значущості α

Кількість ступенів вільності k	α 0,95	α 0,90	α 0,50	α 0,30	α 0,20	α 0,10	α 0,05	α 0,025	α 0,01
1	0,004	0,016	0,455	1,074	1,642	2,71	3,84	5,0	6,6
2	0,103	0,211	1,386	2,41	3,22	4,60	5,99	7,4	9,2
3	0,352	0,584	2,37	3,67	4,64	6,25	7,82	9,4	11,3
4	0,711	1,064	3,36	4,88	5,99	7,78	9,49	11,1	13,3
5	1,145	1,61	4,35	6,06	7,29	9,24	11,07	12,8	15,1
6	1,635	2,20	5,35	7,23	8,56	10,64	12,59	14,4	16,8
7	2,17	2,83	6,35	8,38	9,80	12,02	14,07	16,0	18,5
8	2,73	3,49	7,34	9,52	11,03	13,36	15,51	17,5	20,1
9	3,32	4,17	8,34	10,66	12,24	14,68	16,92	19,0	21,7
10	3,94	4,86	9,34	11,78	13,44	15,99	18,31	20,5	23,2
11	4,58	5,58	10,34	12,90	14,63	17,28	19,68	21,9	24,7
12	5,23	6,30	11,34	14,01	15,84	18,55	21,0	23,3	26,2
13	5,89	7,04	12,34	15,12	16,98	19,81	22,4	24,7	27,7
14	6,57	7,79	13,34	16,22	18,15	21,1	23,7	26,1	29,1
15	7,26	8,55	14,34	17,32	19,31	22,3	25,0	27,5	30,6
16	7,96	9,31	15,34	18,42	20,5	23,5	26,3	28,8	32,0
17	8,67	10,08	16,34	19,51	21,6	24,8	27,6	30,2	33,4
18	9,39	10,86	17,34	20,6	22,8	26,0	28,9	31,5	34,8
19	10,11	11,65	18,34	21,7	23,9	27,2	30,1	32,9	36,2
20	10,85	12,44	19,34	22,8	25,0	28,4	31,4	34,2	37,6
21	11,59	13,24	20,3	23,9	26,2	29,6	32,7	35,5	38,9
22	12,34	14,04	21,3	24,9	27,3	30,8	33,9	36,8	40,3
23	13,09	14,85	22,3	26,0	28,4	32,0	35,2	38,1	41,6
24	13,85	15,66	23,3	27,0	29,6	33,2	36,4	39,4	43,0
25	14,61	16,47	24,3	28,2	30,7	34,4	37,7	40,6	44,3
26	15,38	17,29	25,3	29,2	31,8	35,6	38,9	41,9	45,6
27	16,15	18,11	26,3	30,3	32,9	36,7	40,1	43,2	47,0
28	16,93	18,94	27,3	31,4	34,0	37,9	41,3	44,5	48,3
29	17,71	19,77	28,3	32,5	35,1	39,1	42,6	45,7	49,6
30	18,49	20,60	29,3	33,5	36,2	40,3	43,8	47,0	50,9

Таблиця 4

Таблиця значень $t_\gamma = t(k,\gamma)$ (розподіл Стьюдента)

Кількість ступенів вільності	$\gamma = 1 - \alpha$					
k	0,9	0,95	0,98	0,99	0,998	0,999
1	6,31	12,7	31,82	63,7	318,3	637,0
2	2,92	4,30	6,97	9,92	22,33	31,6
3	2,35	3,18	4,54	5,84	10,21	12,9
4	2,13	2,78	3,75	4,60	7,17	8,61
5	2,01	2,57	3,37	4,03	5,89	6,86
6	1,94	2,45	3,14	3,71	5,21	5,96
7	1,89	2,37	3,00	3,50	4,79	5,40
8	1,86	2,31	2,90	3,36	4,50	5,04
9	1,83	2,26	2,82	3,25	4,30	4,78
10	1,81	2,23	2,76	3,17	4,14	4,59
11	1,80	2,20	2,72	3,11	4,03	4,44
12	1,78	2,18	2,68	3,06	3,93	4,32
13	1,77	2,16	2,65	3,01	3,85	4,22
14	1,76	2,14	2,62	2,98	3,79	4,14
15	1,75	2,13	2,60	2,95	3,73	4,07
16	1,75	2,12	2,58	2,92	3,69	4,01
17	1,74	2,11	2,57	2,90	3,65	3,96
18	1,74	2,10	2,55	2,88	3,61	3,92
19	1,73	2,09	2,54	2,86	3,58	3,88
20	1,73	2,09	2,53	2,85	3,55	3,85
21	1,72	2,08	2,52	2,83	3,53	3,82
22	1,72	2,07	2,51	2,82	3,51	3,79
23	1,71	2,07	2,50	2,81	3,49	3,77
24	1,71	2,06	2,49	2,80	3,47	3,75
25	1,71	2,06	2,49	2,79	3,45	3,72
26	1,71	2,06	2,48	2,78	3,44	3,71
27	1,71	2,05	2,47	2,77	3,42	3,69
28	1,70	2,05	2,47	2,76	3,41	3,67
29	1,70	2,05	2,46	2,76	3,40	3,66
30	1,70	2,04	2,46	2,75	3,39	3,65
40	1,68	20,2	2,42	2,70	3,31	3,55
60	1,67	2,00	2,39	2,66	3,23	3,46
120	1,66	1,98	2,36	2,62	3,17	3,37
∞	1,64	1,96	2,33	2,58	3,09	3,29

Таблиця 5

Критичні точки розподілу *F* Фішера-Снедекора

Рівень значущості $\alpha = 0{,}01$

k_2	k_1											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	4052	4999	5403	5625	5764	5889	5928	5981	6022	6056	6082	6106
2	98,49	99,01	90,17	99,25	99,33	99,30	99,34	99,36	99,36	99,40	99,41	99,42
3	34,12	30,81	29,46	28,71	28,24	27,91	27,67	27,49	27,34	27,23	27,13	27,05
4	21,20	18,00	16,69	15,98	15,52	15,21	14,98	14,80	14,66	15,54	14,45	14,37
5	16,26	13,27	12,06	11,39	10,97	10,67	10,45	10,27	10,15	10,05	9,96	9,89
6	13,74	10,92	9,78	9,15	8,75	8,47	8,26	8,10	7,98	7,87	7,79	7,72
7	12,25	9,55	8,45	7,85	7,46	7,19	7,00	6,84	6,71	6,62	6,54	6,47
8	11,26	8,65	7,59	7,01	6,63	6,37	6,19	6,03	5,91	5,82	5,74	5,67
9	10,56	8,02	6,99	6,42	6,06	5,80	5,62	5,47	5,35	5,26	5,18	5,11
10	10,04	7,56	6,55	5,99	5,64	5,39	5,21	5,06	4,95	4,85	4,78	4,71
11	9,86	7,20	6,22	5,67	5,32	5,07	4,88	4,74	4,63	4,54	4,46	4,40
12	9,33	6,93	5,95	5,41	5,06	4,82	4,65	4,50	4,39	4,30	4,22	4,16
13	9,07	6,70	5,74	5,20	4,86	4,62	4,44	4,30	4,19	4,10	4,02	3,96
14	8,86	6,51	5,56	5,03	4,69	4,46	4,28	4,14	4,03	3,94	3,86	3,80
15	8,68	6,36	5,42	4,89	4,56	4,32	4,14	4,00	3,89	3,80	3,73	3,67
16	8,53	6,23	5,29	4,77	4,44	4,20	4,03	3,89	3,78	3,69	3,61	3,55
17	8,40	6,11	5,18	4,67	4,34	4,10	3,93	3,79	3,68	3,59	3,52	3,45

Рівень значущості $\alpha = 0{,}05$

k_2	k_1											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	161	200	216	225	230	234	237	239	241	242	243	244
2	18,51	19,00	19,16	19,25	19,30	19,33	19,36	19,37	19,38	19,37	19,40	19,41
3	10,12	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,88	8,84	8,81	8,78	8,76	8,74
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,09	6,04	6,00	5,96	5,93	5,91
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,88	4,82	4,78	4,74	4,70	4,68
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,21	4,15	4,10	4,06	4,03	4,00
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,79	3,73	3,68	3,63	3,60	3,57
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,50	3,44	3,39	3,34	3,31	3,28
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,29	3,23	3,18	3,13	3,10	3,07
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,20	3,14	3,07	3,02	2,97	2,94	2,91
11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	3,01	2,95	2,90	2,86	2,82	2,79
12	4,75	3,88	3,49	3,26	3,11	3,00	2,92	2,85	2,80	2,76	2,72	2,69
13	4,67	3,80	3,41	3,18	3,02	2,92	2,84	2,77	2,72	2,67	2,63	2,60
14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,77	2,70	2,65	2,60	2,56	2,53
15	4,54	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,70	2,64	2,59	2,55	2,51	2,48
16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,66	2,59	2,54	2,49	2,45	2,42

17	4,45	3,59	3,20	2,96	2,81	2,70	2,62	2,55	2,50	2,45	2,41	2,38

Таблиця 6

Значення $p_k = \dfrac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$

k	λ								
	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
0	0,9048	0,8187	0,7408	0,6703	0,6065	0,5488	0,4966	0,4493	0,4066
1	0,0905	0,1637	0,2222	0,2681	0,3033	0,3293	0,3476	0,3595	0,3659
2	0,0045	0,0164	0,0333	0,0536	0,0758	0,0988	0,1217	0,1438	0,1647
3	0,0002	0,0011	0,0033	0,0072	0,0126	0,0198	0,0284	0,0383	0,0494
4		0,0001	0,0003	0,0007	0,0016	0,0030	0,0050	0,0077	0,0111
5				0,0001	0,0002	0,0004	0,0007	0,0012	0,0020
6							0,0001	0,0002	0,0003
k	λ								
	1,0	2,0	3,0	4,0	5,0	6,0	7,0	8,0	9,0
0	0,3679	0,1353	0,0498	0,0183	0,0067	0,0025	0,0009	0,0003	0,0001
1	0,3679	0,2707	0,1494	0,0733	0,0337	0,0149	0,0064	0,0027	0,0011
2	0,1839	0,2707	0,2240	0,1465	0,0842	0,0446	0,0223	0,0107	0,0050
3	0,0613	0,1804	0,2240	0,1954	0,1404	0,0892	0,0521	0,0286	0,0150
4	0,0153	0,0902	0,1680	0,1954	0,1755	0,1339	0,0912	0,0573	0,0337
5	0,0031	0,0361	0,1008	0,1563	0,1755	0,1606	0,1277	0,0916	0,0607
6	0,0005	0,0120	0,0504	0,1042	0,1462	0,1606	0,1490	0,1221	0,0911
7	0,0001	0,0034	0,0216	0,0595	0,1044	0,1377	0,1490	0,1396	0,1171
8		0,0009	0,0081	0,0298	0,0653	0,1033	0,1304	0,1396	0,1318
9		0,0002	0,0027	0,0132	0,0363	0,0688	0,1014	0,1241	0,1318
10			0,0008	0,0053	0,0181	0,0413	0,0710	0,0993	0,1186
11			0,0002	0,0019	0,0082	0,0225	0,0452	0,0722	0,0970
12			0,0001	0,0006	0,0034	0,0113	0,0264	0,0481	0,0728
13				0,0002	0,0013	0,0052	0,0142	0,0296	0,0504
14				0,0001	0,0005	0,0022	0,0071	0,0169	0,0324
15					0,0002	0,0009	0,0033	0,0090	0,0194
16						0,0003	0,0014	0,0045	0,0109
17						0,0001	0,0006	0,0021	0,0058
18							0,0002	0,0009	0,0029
19							0,0001	0,0004	0,0014
20								0,0002	0,0006
21								0,0001	0,0003
22									0,0001

Список використаної літератури

1. Дубовик В. П. Вища математика: навч. посіб. / Дубовик В.П., Юрик І.І. – К.: А.С.К., 2005. – 648с.
2. Дубовик В. П. Вища математика. Збірник задач: навч. посіб. / Дубовик В. П., Юрик І. І. – К.: А.С.К., 2005. – 648с.
3. Берман Г. Н. Сборник задач по курсу математического анализа: Уч. пособие. – 22-е изд., перераб. – СПб.: Изд-во «Профессия», 2005. – 432 с.
4. Бугров Я. С., Никольский С. М. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы, ряды /Я. С. Бугров, С. М. Никольский. – М., Наука, 1988. – 425с.
5. Шкіль М. І. Математичний аналіз / М. І. Шкіль. Ч.2. – Київ, 1981. – 465 с.
6. Пискунов Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисления (т.2). М.: Наука, 1996. – 416с.
7. Кушлик-Дивульська О.І. Елементи лінійної, векторної алгебри. Аналітична геометрія. Вступ до математичного аналізу [Електронний ресурс]: збірник типових завдань кредитного модуля «Вища математика-1» для студентів видавничо-поліграфічного інституту / НТУУ «КПІ» ; уклад. О. І. Кушлик-Дивульська, Н. В. Поліщук, Н. П. Селезньова. –Електронні текстові дані (1 файл: 3,67 Мбайт). – Київ : НТУУ «КПІ», 2015. – 149 с. – Назва з екрана. – Доступ : http://ela.kpi.ua/handle/123456789/10429.
8. Кушлик-Дивульська О. І. Методичні вказівки до виконання розрахункової роботи кредитного модуля "Інтегральне числення функції однієї змінної. Диференціальні рівняння" для напрямів підготовки 6.051501 "Видавничо-поліграфічна справа", 6.050503 "Машинобудування" для студентів Видавничо-поліграфічного інституту [Електронний ресурс] / НТУУ "КПІ"; Уклад. О. І. Кушлик-Дивульська. − Електронні текстові дані (1 файл: 2,64 Мбайт). − Київ: НТУУ "КПІ", 2013. − 117с. − Назва з екрана. − Доступ http://ela.kpi.ua/handle/123456789/2838.

9. Кушлик-Дивульська О. І. Конспект лекцій кредитного модуля «Інтегральне числення функції однієї змінної. Диференціальні рівняння» (Вища математика-2) для напряму підготовки 6.051501 «Видавничо-поліграфічна справа» [Електронний ресурс] / НТУУ «КПІ» ; уклад. О. І. Кушлик-Дивульська. − Електронні текстові данні (1 файл: 3,68 Мбайт). – Київ : НТУУ «КПІ», 2015. – 241с. – Назва з екрана. – Доступ: http://ela.kpi.ua/handle/123456789/12700.

10. Кулик Г. М. Вища математика: Інтегральне числення функції однієї змінної. Диференціальні рівняння [Електронний ресурс]: навчальний посібник для студентів технічних спеціальностей / Г. М. Кулик, О. І. Кушлик-Дивульська, Н. В. Степаненко, Н. П. Ярема: НТУУ "КПІ". − Електронні текстові дані (1файл: 5,04 Мбайт). − К.: НТУУ "КПІ". 2016.−278с. – Назва з екрана. –Доступ: http://ela.kpi.ua/handle/123456789/16444.

11. Кушлик-Дивульська О. І. Елементи лінійної, векторної алгебри. Аналітична геометрія. Вступ до математичного аналізу [Електронний ресурс] : навчальний посібник [для студентів Видавничо-поліграфічного інституту спеціальності 186 «Видавництво та поліграфія»] / О. І. Кушлик-Дивульська, Н. В. Поліщук ; відп. ред. С. Д. Івасишен; КПІ ім. Ігоря Сікорського. – Електронні текстові дані (1 файл: 3,15 Мбайт). – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2017. – 141 с. – Назва з екрана. – Доступ: http://ela.kpi.ua/handle/123456789/19572.

12. Кушлик-Дивульська О.І. Методичні вказівки до виконання лабораторних робіт з дисципліни «Теорія ймовірностей і математична статистика» для напряму підготовки 6.030601 «Менеджмент» спеціальності 7.03060101 «Менеджмент організацій і адміністрування» для студентів видавничо-поліграфічного інституту [Електронний ресурс]/ НТУУ «КПІ»; уклад. О.І. Кушлик-Дивульська, Б.Р. Кушлик.− Електронні текстові данні (1 файл: 3,74 Мбайт).– Київ: НТУУ «КПІ», 2015.–161с. – Назва з екрана. – Доступ : http://ela.kpi.ua/handle/123456789/14333.

13. Кушлик-Дивульська О. І. Теорія ймовірностей та математична статистика: навч. посіб. ⁄ О. І. Кушлик-Дивульська, Н. В. Поліщук, Б. П. Орел, П. І. Штабалюк.− К: НТУУ «КПІ», 2014. – 212 с. – Назва з екрана. – Доступ : – http://ela.kpi.ua/handle/123456789/18378.

14. Кушлик-Дивульська О. І. Вища математика. Елементи теорії поля і теорія рядів. Курс лекцій [Електронний ресурс] : навч. посіб. для студ. спеціальності 186 «Видавництво та поліграфія» / КПІ ім. Ігоря Сікорського ; уклад.: О. І. Кушлик-Дивульська, Н. В. Поліщук. – Електронні текстові дані (1 файл: 3,12 Мбайт). – Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2018. – 155 с. – Назва з екрана. – Доступ: http://ela.kpi.ua/handle/123456789/21729.

15. Кушлик-Дивульська О. І. Вища математика. Елементи теорії поля і теорія рядів. Розрахункова робота [Електронний ресурс] : навч. посіб. для студ. спеціальності 186 «Видавництво та поліграфія» / КПІ ім. Ігоря Сікорського; уклад.: О. І. Кушлик-Дивульська, Н. В. Поліщук. – Електронні текстові дані (1 файл: 2,27 Мбайт). – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2018. – 110 с. – Назва з екрана. – Доступ: http://ela.kpi.ua/handle/123456789/21730.

16. Кушлик Б. Р. Стабілізація друкування малотиражної продукції офсетним друком : монографія / Б. Р. Кушлик, О. І. Кушлик-Дивульська ; за заг. ред. О. М. Величко. – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, Вид-во «Політехніка», 2017. – 162 с.

Список рекомендованої літератури

1. Шкіль М. І. Вища математика: підручник у 3-х книгах. Кн.1. Аналітична геометрія з елементами алгебри. / М. І. Шкіль, Т. В. Колесник, В. М. Котлова. – Київ, Либідь, 1994. – 280с.

2. Шкіль М. І. Вища математика: підручник у 3-х книгах. Кн.2. Диференціальне та інтегральне числення функцій однієї змінної. / М. І. Шкіль, Т. В. Колесник, В. М. Котлова. – Київ, Либідь, 1994. – 352с.

3. Коваленко І. П. Вища математика: навч. посіб. для студентів ВНЗ.– Київ, Вища школа, 2006. – 343с.

4. Лавренчук В. П. Вища математика. Загальний курс. Ч. 1. Лінійна алгебра та аналітична геометрія. / В. П. Лавренчук, О. Р. Мартинюк, О. С. Кондур. – Чернівці, Книга – XXI , 2010. – 319с.

5. Лаптев Г.Ф. Элементы векторного исчисления: учебник для студентов втузов. – Москва, Наука, 1975. –336с.

6. Вища математика: Збірник задач у 2-х частинах. Ч. 1. Лінійна і векторна алгебра, аналітична геометрія. Вступ до математичного аналізу. Диференціальне та інтегральне числення. За ред. П. П. Овчинникова. – Київ, Техніка, 2004. – 279с.

7. Дюженкова Л. І. Вища математика: приклади і задачі: навч. посіб./ Л. І. Дюженкова, О. Ю. Дюженкова, Г. О. Міхалін. – Київ, Академія, 2002. – 624с.

8. Дюженкова Л. І. Математичний аналіз у задачах і прикладах: у 2-х частинах. Ч. 1. Навч. посіб./ Л.І. Дюженкова, Т. В. Колесник, М. Я. Лященко та ін. – Київ, Вища школа, 2002. – Ч. 1. – 462с.

9. Шунда Н. М. Практикум з математичного аналізу: навч. посіб. / Н. М. Шунда, А. А. Томусяк. – Київ, Вища школа, 1993. – 375 с.

10. Данко П. Е. Высшая математика в упражнениях и задачах: в 2-х частях. Ч.1. Учеб. пос. Для студ. втузов./ П. Е. Данко, А. Г. Попов, Т. Я. Кожевникова. – М.: Высшая школа, 1980. – Ч. 1. – 320 с.

11. Сборник задач по математике для втузов. Ч. 1. Линейная алгебра и основы математичного анализа: учеб. пособие для втузов. / В. А. Болгов, Б. П. Демидович, А. В. Ефимов и др. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит. 1986. – Ч. 1. – 464 с.

12. Кудрявцев В. А. Краткий курс высшей математики. / В. А. Кудрявцев, Б. П. Демидович. – М, Наука, 1989. – 656 с.